

A

Βασική αρχή της Μετρολογίας

$$\Delta_{\text{ολικό}} = \Delta_{\text{οργάνου}} + \Delta_{\text{τυχαίο}}$$

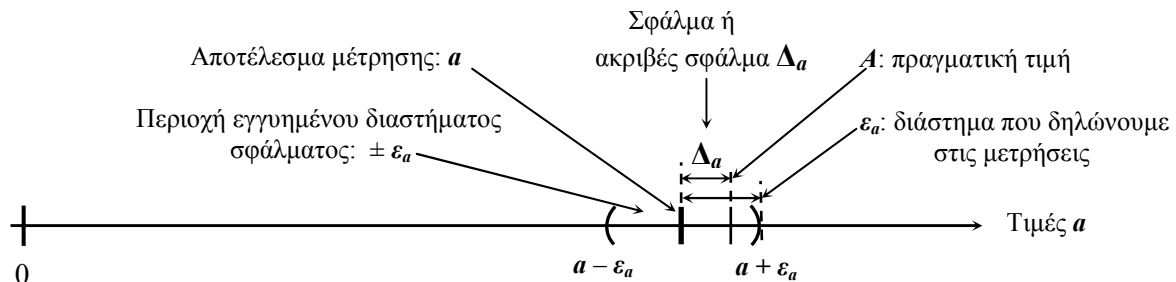
(Οι δύο όροι σφάλματος είναι ανεξάρτητοί και προσδιορίζονται χωριστά, θεωρώντας τον άλλο μηδέν)

B: Μετρήσεις με καλή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων

Σε άμεσες μετρήσεις με *καλή επαναληψιμότητα* των αποτελεσμάτων a_i , όπου η τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων είναι πολύ μικρότερη του σφάλματος του οργάνου, ($\sigma \ll \Delta_{\text{οργ}}$), ως τιμή του μετρούμενου μεγέθους σημειώνεται η ένδειξη του οργάνου a , ενώ το σφάλμα μέτρησης καθορίζεται από το σφάλμα του οργάνου, $\Delta_{\text{οργ}}$, που σε *εγγυημένη* μορφή δηλώνεται από την κατασκευάστρια εταιρεία.

Γ: Γενικός ορισμός του σφάλματος

Όπως και στα σφάλματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, η παράσταση του αποτελέσματος ως $A = a \pm \varepsilon_a$ παριστάνει τη διπλή ανισότητα $a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a$, όπου A είναι η πραγματική τιμή, ενώ η ε_a είναι το εγγυημένο διάστημα σφάλματος. Επομένως, η πραγματική τιμή A βρίσκεται “κάπου” εντός του διαστήματος $a \pm \varepsilon_a$ (βλ. Σχ. 1).



Σχήμα 1. Γενικός ορισμός του σφάλματος.

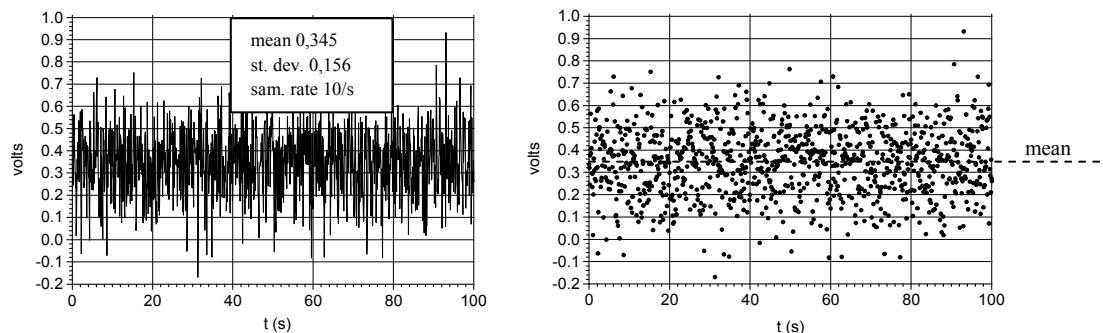
Δ: Μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων

Σε μετρήσεις με *κακή επαναληψιμότητα* των αποτελεσμάτων a_i , με τυπική απόκλιση σ , ($\sigma \geq \Delta_{\text{οργ}}$), ως τιμή του μετρούμενου μεγέθους σημειώνεται ο μέσος όρος των a_i , ($\bar{a}$), ενώ στο εγγυημένο διάστημα σφάλματος του οργάνου ($\Delta_{\text{οργ}}$) προστίθεται και η *αβεβαιότητα* της μέσης τιμής:

1. Για μεγάλα n ($n \geq 200$) και $P \geq 99,7 \%$, $A = \bar{a} \pm (\Delta_{\text{οργ}} + 3\sigma_\mu)$, όπου σ_μ - τυπικό σφάλμα, που

υπολογίζεται ως $\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}}$ ή $\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum (a_i - A)^2}{n^2}}$, όταν η πραγματική τιμή A είναι γνωστή.

2. Για μικρά n ($3 < n < 10$) και $P \geq 99,7 \%$, $A = \bar{a} \pm (\Delta_{\text{οργ}} + t_{n,p}\sigma_\mu)$, $t_{n,p}$ - συντελεστής Student.



Σχήμα 2. Εικόνα ενός έντονα θορυβούμενου ηλεκτρικού σήματος στο καταγραφικό του υπολογιστή.

Περίληψη των Συμπληρωματικών σημειώσεων προς τον εργαστηριακό οδηγό (σφάλμα απλής μέτρησης, μετρητικών οργάνων, προσεγγιστικών αριθμών εν γένει, κ.λπ.), Β. Πεδόγλος.

Σύνοψη των κυριότερων αποτελεσμάτων

1. Σε άμεσες μετρήσεις με αναλογικά και ψηφιακά όργανα:

Έστω ότι η πραγματική τιμή κάποιου αμετάβλητου στο χρόνο μεγέθους είναι A , ενώ ο υπολογισμός ή η μέτρησή του έδωσε την τιμή a . Συνήθως, $a \neq A$.

1.1. Το διάστημα $\pm \varepsilon_a$, γύρο από την τιμή a , εντός του οποίου με σιγουριά 100 % βρίσκεται η πραγματική τιμή A ορίζεται ως εγγυημένο διάστημα σφάλματος (σελ. 12).

1.2. Πίσω από τη συμβολική παράσταση του αποτελέσματος μέτρησης, $A = a \pm \varepsilon_a$, κρύβονται οι 2 βασικές ανισότητες της Θεωρίας Σφαλμάτων:

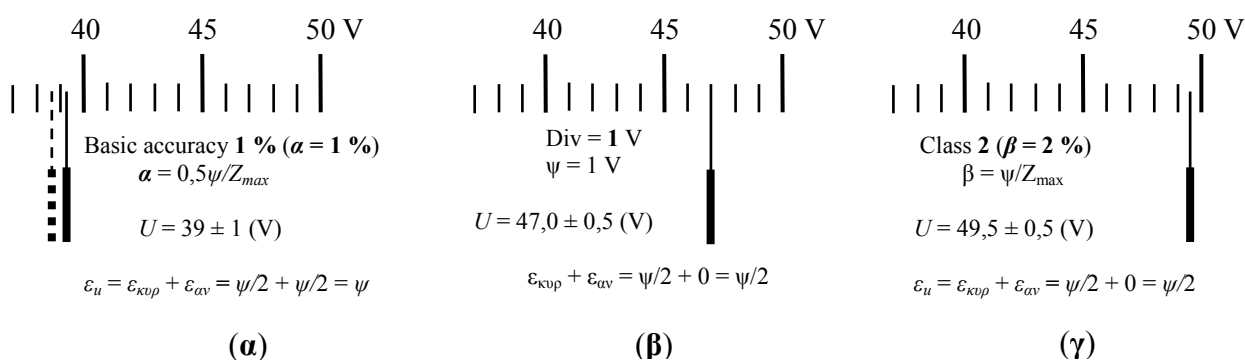
$$a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a, \text{ (σελ. 12).}$$

2. Στους αναλογικούς μετρητές το εγγυημένο διάστημα σφάλματος δηλώνεται από την κατασκευάστρια εταιρεία, συνήθως σε κωδικοποιημένη μορφή. Το “σφάλμα” αυτό επεκτείνεται σε όλη την κλίμακα του οργάνου, προκαλώντας μείωση της ακρίβειας (μεγάλο σχετικό σφάλμα) σε μικρές τιμές της κλίμακας (σελ. 15). Η εγγύηση ακρίβειας διαρκεί 2 έτη, μετά το πέρας των οποίων ο μετρητής πρέπει να διακριβωθεί εκ’ νέου.

2.1. Στους αναλογικούς μετρητές η ένδειξη στρογγυλοποιείται (ψηφιοποιείται, σημειώνεται η κοντινότερη χαρακιά), με βήμα $\psi/2$, όπου ψ είναι η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακάς του. Κλάσματα μικρότερα της $\psi/2$ δεν σημειώνονται στην τιμή. Η πρακτική αυτή δημιουργεί το λεγόμενο σφάλμα ανάγνωσης, άνω όριο του οποίου είναι $\psi/2$ (σελ. 15).

2.2. Στα αναλογικά όργανα, το σφάλμα οργάνου έχει 2 συνιστώσες: το σφάλμα ανάγνωσης ($\psi/2$) και το κύριο σφάλμα του μετρητή, $\psi/2$ και αυτό. Σε μία τυχαία θέση του δείκτη (Σχ. 3α), το εγγυημένο διάστημα σφάλματος είναι

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\kappa\upsilon\rho} + \varepsilon_{\alpha\nu} = \psi/2 + \psi/2 = \psi.$$



Σχήμα 3. Σφάλμα του αναλογικού οργάνου και ανάγνωση της ένδειξης με στρογγυλοποίηση.

Όταν, όμως, το σφάλμα ανάγνωσης είναι **0** ($\varepsilon_{\alpha\nu} = 0$), δηλαδή ο δείκτης βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά “ακριβώς” (Σχ. 3β), ή στη μέση (Σχ. 3γ), όπου αδυνατούμε να επιλέξουμε την κοντινότερη χαρακιά, τότε στο σφάλμα συμβάλει μόνο το κύριο σφάλμα του οργάνου:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\kappa\upsilon\rho} + 0 = \psi/2.$$

2.3. Συνήθως, $\varepsilon_{\text{οργ}} = \psi$. Στα όργανα όπου $\varepsilon_{\text{οργ}} \neq \psi$, το σφάλμα οργάνου προσδιορίζεται από το γινόμενο βZ_{max} , όπου β είναι η κατηγορία του οργάνου (Class β) και Z_{max} είναι η μέγιστη τιμή της κλίμακάς του.

3. Στα ψηφιακά όργανα το σφάλμα ανάγνωσης είναι μηδέν. Η ολίσθηση του μηδενός ελέγχεται (εξουδετερώνεται) ηλεκτρονικά, πριν από κάθε κύκλο μέτρησης που διαρκεί 0,33 s. Το κύριο σφάλμα ή το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού οργάνου δηλώνεται στο συνοδευτικό βιβλιαράκι και συνήθως η δήλωση έχει τη μορφή:

$$\text{Accuracy: } \gamma (\%) + hr,$$

όπου r είναι διακριτική ικανότητα (resolution) της επιλεγμένης κλίμακας ή η μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης της παριστάμενης στην ψηφιακή οθόνη τιμής, ενώ το γινόμενο hr είναι το άνω όριο του υπολοίπου της αυτόματης ρύθμισης του μηδενός.

Το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού οργάνου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_a = a\gamma + hr,$$

όπου a είναι η ένδειξή του.

Ωστόσο η μέτρηση της μεταβολής του σήματος κατά Δa ($\Delta a = a_2 - a_1$), γίνεται με εγγυημένο διάστημα

$$\varepsilon_{\Delta a} = \gamma \Delta a,$$

το οποίο είναι απαλλαγμένο από τον όρο hr , καθώς ο όρος αυτός έχει ίδια τιμή και πρόσημο στις τιμές a_2 και a_1 . Στην περίπτωση αυτή τα σφάλματα αφαιρούνται όπως και οι 2 τιμές, δηλαδή αλγεβρικά:

$$\varepsilon_{\Delta a} = (a_2\gamma + hr) - (a_1\gamma + hr) = \gamma \Delta a.$$

Όταν οι μεταβολές της ένδειξης a είναι πολύ μικρές ($\gamma \Delta a < r$), το γινόμενο $\gamma \Delta a$ αγνοείται, ενώ για εγγυημένο διάστημα σφάλματος της μεταβολής Δa σημειώνεται η τιμή της διακριτικής ικανότητας r (σελ. 18):

$$\varepsilon_{\Delta a} = r.$$

4. Διάδοση των σφαλμάτων σε μετρήσεις με καλή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων

Έστω, ότι οι τιμές a και b μετρήθηκαν άμεσα, με σταθερές ενδείξεις των οργάνων και εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων ε_a και ε_b , αντίστοιχα. Σε έμμεσες μετρήσεις, όπου οι τιμές και τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων Δ_a και Δ_b είναι άγνωστα:

4.1. Στην πρόσθεση και αφαίρεση δύο προσεγγιστικών αριθμών, $u = a \pm b$, προκειμένου το διάστημα σφάλματος να είναι εγγυημένο, τα εγγυημένα διαστήματα ε_a και ε_b τα προσθέτουν αριθμητικά:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b, \text{ (σελ. 76).}$$

4.2. Στον πολλαπλασιασμό δύο προσεγγιστικών αριθμών, $u = ab$, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος, ε_u , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_u = |a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a \text{ (σελ. 77).}$$

4.3. Στη διαίρεση δύο προσεγγιστικών αριθμών, $u = a/b$, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος, ε_u , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_u = \frac{|a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a}{b^2} \text{ (σελ. 77).}$$

4.4 Για το σχετικό σφάλματα, δ_u , γινομένου και διαίρεσης, ισχύει η σχέση

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b, \text{ όπου } \delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u}, \quad \delta_a = \frac{\varepsilon_a}{a} \quad \text{και} \quad \delta_b = \frac{\varepsilon_b}{b} \text{ (σελ. 25).}$$

Εγγυημένο διάστημα σφάλματος και τυπικό σφάλμα μ.τ. μερικών συναρτήσεων (σε. 102)

Συνάρτηση u	Εγγυημένο διάστημα σφάλματος ε_u	Τυπικό σφάλμα σ_u της μέσης τιμής με πιθανότητα κάλυψης 68,27 % ($n = \infty$)
Πρόσθεση $u = x + y$	$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$(\sigma_u)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
Διαφορά $u = x - y$	$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$(\sigma_u)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
Γενικά $u = ax \pm by \pm cz \pm$	$\varepsilon_u = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z +$	$(\sigma_u)^2 = (a\sigma_x)^2 + (b\sigma_y)^2 + (c\sigma_z)^2$
Πολλαπλασιασμός με σταθερά $u = kx$	$\varepsilon_u = k \varepsilon_x$	$\sigma_u = k \sigma_x$
Δύναμη $u = x^n$	$\varepsilon_u = nx^{n-1} \varepsilon_x$	$\sigma_u = nx^{n-1} \sigma_x$
Γινόμενο $u = xy$	$\delta_u = \delta_x + \delta_y$, όπου δ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2$, όπου δ είναι το σχετικό σφάλμα
Πηλίκο $u = x/y$	$\delta_u = \delta_x + \delta_y$, όπου δ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2$, όπου δ είναι το σχετικό σφάλμα
Γινόμενο δυνάμεων $u = x^a y^b z^c \dots$	$\delta_u = a\delta_x + b\delta_y + c\delta_z +$, όπου δ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (a\delta_x)^2 + (b\delta_y)^2 + (c\delta_z)^2$, όπου δ είναι το σχετικό σφάλμα
Εκθετικό $u = e^{ax}$	$\varepsilon_u = a e^{ax} \varepsilon_x$	$\sigma_u = a e^{ax} \sigma_x$
Ημίτονο $u = a \sin(\beta x)$	$\varepsilon_u = a\beta \cos(\beta x) \varepsilon_x$	$\sigma_u = a\beta \cos(\beta x) \sigma_x$
Συνημίτονο $u = a \cos(\beta x)$	$\varepsilon_u = a\beta \sin(\beta x) \varepsilon_x$	$\sigma_u = a\beta \sin(\beta x) \sigma_x$
Συνάρτηση πολλών μεταβλητών $u = f(x, y, z, \dots)$	$\varepsilon_f = \left \frac{\partial f}{\partial x} \right \varepsilon_x + \left \frac{\partial f}{\partial y} \right \varepsilon_y +$ όπου $X = x \pm \varepsilon_x, Y = y \pm \varepsilon_y, \dots$	$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 +$ όπου $X = \bar{x} \pm \sigma_x, Y = \bar{y} \pm \sigma_y, \dots$ και $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$

5. Στη συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ προσεγγιστικών μεταβλητών x_i , που μετρήθηκαν άμεσα, με εγγυημένα σφάλματα ε_i , το εγγυημένο διάστημα σφάλματος της f υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \varepsilon_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \varepsilon_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \varepsilon_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| \varepsilon_3 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \varepsilon_n \quad (\text{σελ. 78}).$$

6. Διαφορική μέθοδος μέτρησης. Σε μικρές τιμές της κλίμακας του οργάνου, όπως, για παράδειγμα, $z \approx 0,1Z_{max}$, η ακρίβεια μέτρησης είναι μικρή, η οποία, όμως, σε διαφορικές μετρήσεις μπορεί να βελτιωθεί (σελ. 36).

Στη διαφορική μέθοδο η βασική μέτρηση συμπληρώνεται με μία βοηθητική, που είναι 2 φορές μικρότερη. Παρότι η ακρίβεια της βοηθητικής μέτρησης είναι ακόμη χαμηλότερη, στις διαφορές των 2 τιμών τα σφάλματα είναι μικρότερα, καθώς εδώ αποβάλλονται μερικά βασικά σφάλματα των οργάνων.

7. Σε άμεσες μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων a_i (τυχαίες τιμές):

7.1. Όλες οι μαθηματικές σχέσεις που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό αναφέρονται για $n \geq 200$ (!), οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν και σε μικρά n ($3 < n < 10$), αλλά τότε το σφάλμα της μέσης τιμής (τυπικό σφάλμα) έχει *απροσδιόριστη (άγνωστη)* πιθανότητα κάλυψης.

7.2 Σε *έμμεσες* μετρήσεις της y , όπου η y είναι συνάρτηση n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, που μετρήθηκαν άμεσα, με τυπικά σφάλματα $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$, το τυπικό σφάλμα της y υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3} \right)^2 \sigma_3^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_n^2},$$

η οποία μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής των σφαλμάτων.

Όταν κάποια τυπικά σφάλμα είναι αλληλοεξαρτώμενα και συσχετισμένα μεταξύ τους, τότε η υπόριζη παράσταση πρέπει να συμπληρώνεται με όρους τύπου

$$2r_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j} \sigma_i \sigma_j,$$

όπου r_{ij} είναι ο συντελεστής συσχέτισης των δύο εξαρτώμενων σφαλμάτων.

7.3. Σε μικρές τιμές του n ($3 < n < 10$) και άγνωστη την πραγματική τιμή, το τυπικό σφάλμα, σ_μ , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}},$$

ενώ για να αποκτήσει αυτό μία συγκεκριμένη πιθανότητα κάλυψης P , η ποσότητα σ_μ πρέπει να πολλαπλασιαστεί στον κατάλληλο συντελεστή Student $t_{n,p}$ (Πίνακας 5, σελ. 104).

Σε άμεσες μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων a_i , όπου $\sigma \geq \Delta_{орг}$, στο σφάλμα οργάνου προστίθεται η *αβεβαιότητα της μέσης τιμής* ($3\sigma_\mu$ ή $t_{n,p}\sigma_\mu$).

7.4. Για μεγάλα n ($n \geq 200$) και $P \geq 99,7 \%$, το αποτέλεσμα μέτρησης το παρουσιάζουμε σε μορφή:

$$A = \bar{a} \pm (\varepsilon_{орг} + 3\sigma_\mu), \quad P \geq 99,7 \%.$$

7.4.1. Για μικρά n ($3 < n < 10$) και $P \geq 99,7 \%$, το αποτέλεσμα μέτρησης το παρουσιάζουμε σε μορφή:

$$A = \bar{a} \pm (\varepsilon_{орг} + t_{n,p}\sigma_\mu), \quad n = (\dots), \quad P \geq 99,7 \%,$$

όπου $t_{n,p}$ είναι ο συντελεστής Student (βλ. Πίνακα συντελεστών Student).

Πίνακας συντελεστών Student (σελ. 104)

<i>n</i>	<i>P</i>					
	50 %	68,27 % (1σ)	95,45 % (2σ)	99 %	99,73 % (3σ)	99,9 %
2	1,000	1,84	13,97	63,66	235,8	636,6
3	0,916	1,32	4,53	8,92	19,21	31,60
4	0,765	1,20	3,31	5,84	9,22	12,94
5	0,741	1,14	2,87	4,60	6,62	8,610
6	0,727	1,11	2,65	4,03	5,51	6,859
7	0,718	1,09	2,52	3,71	4,90	5,959
8	0,711	1,08	2,43	3,50	4,53	5,405
9	0,706	1,07	2,37	3,36	4,28	5,041
10	0,703	1,06	2,32	3,25	4,09	4,781
11	0,700	1,05	2,28	3,17	3,96	4,587
12	0,697	1,05	2,25	3,11	3,85	4,487
13	0,695	1,04	2,23	3,05	3,76	4,138
14	0,694	1,04	2,21	3,01	3,69	4,221
15	0,692	1,04	2,20	2,98	3,64	4,140
16	0,691	1,03	2,18	2,95	3,59	4,073
17	0,690	1,03	2,17	2,92	3,54	4,015
18	0,689	1,03	2,16	2,90	3,51	3,965
19	0,688	1,03	2,15	2,88	3,48	3,922
20	0,688	1,03	2,14	2,86	3,45	3,883
21	0,687	1,03	2,13	2,85	3,42	3,850
25	0,685	1,02	2,11	2,79	3,33	3,745
30	0,683	1,02	2,09	2,75	3,27	3,659
35		1,01	2,07	2,72	3,23	
40		1,01	2,06	2,70	3,20	
45		1,01	2,06	2,69	3,18	
50		1,01	2,05	2,68	3,16	
100		1,005	2,05	2,63	3,007	
∞	0,674	1,000	2,000	2,576	3,000	3,291

8. **Ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης των τυπικών σφαλμάτων**

Σε μία έμμεση μέτρηση, όπου συμμετέχουν προσεγγιστικά μεγέθη με διαφορετική πιθανότητα κάλυψης του σφάλματος της μέσης τιμής (διαφορετικά confidence level), πριν υπολογιστεί το σφάλμα της σχέσης, τα σφάλματα πρέπει να αποκτήσουν ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης (σελ. 35).

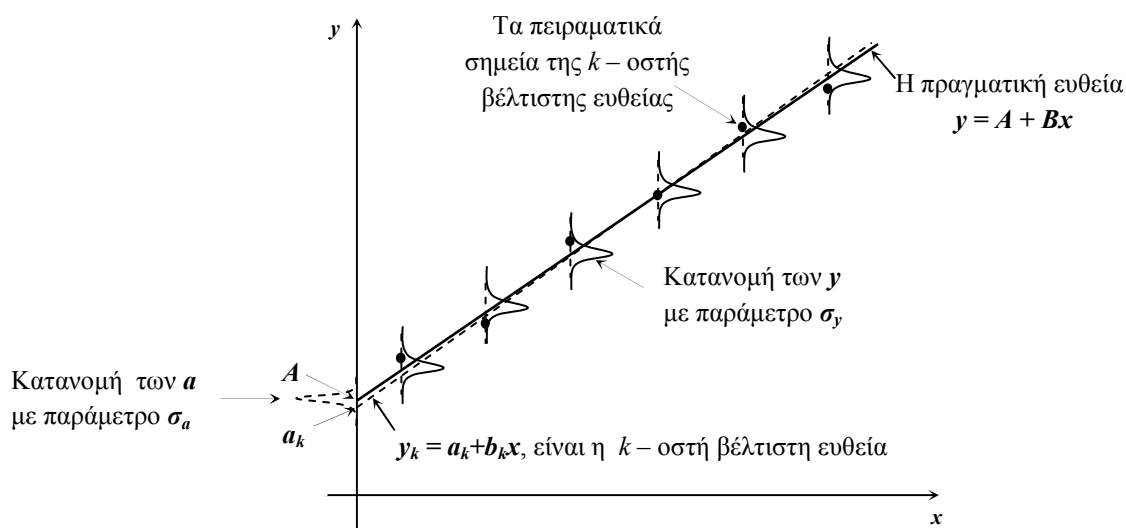
9. **Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε συνάρτηση τύπου $y = A + Bx$**

9.1. Όταν οι τιμές y_i παρουσιάζουν διασπορά με τυπική απόκλιση σ_y , ο πειραματικός προσδιορισμός των σταθερών A και B της γραμμικής σχέσης $y = A + Bx$ γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αν η διασπορά στις τιμές των x_i είναι μηδέν, δηλαδή $\sigma_x = 0$, οι σταθερές a και b της βέλτιστης πειραματικής ευθείας $y = a + bx$ (όχι της πραγματικής) υπολογίζονται όπως στον εργαστηριακό οδηγό:

$$a = \frac{(\sum y_i) \times (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \times (\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Σε μετρήσεις όπου στις τιμές των y_i παρατηρείται σταθερή διασπορά, (ίδιες γκαουσιανές στο Σχ. 4, δηλαδή $\sigma_y = \text{σταθ}$), οι παράμετροι a και b της βέλτιστης ευθείας έχουν τυχαίο χαρακτήρα, καθώς μία επανάληψη του πειράματος θα οδηγήσει σε λίγο διαφορετικές τιμές των a και b . Συνεπώς οι σταθερές a και b της βέλτιστης ευθείας δεν ταυτίζονται με τις πραγματικές τιμές A και B της πραγματικής ευθείας $y = A + Bx$.

Καθώς ο αριθμός των πειραματικών σημείων δεν μπορεί να είναι μεγάλος, στο μοντέλο της μεθόδου, προκειμένου να βρεθούν οι σταθερές A και B της πραγματικής ευθείας, θεωρείται ότι το πείραμα επαναλαμβάνεται k φορές, υπολογίζονται οι παράμετροι των a_k και b_k των k ευθειών, ενώ οι τιμές A και B υπολογίζονται ως μέσοι όροι των a_k και b_k , αντίστοιχα (Σχ.4). Εδώ ο αριθμός k μπορεί να είναι μεγάλος, πολύ μεγάλος ή άπειρος.



Σχήμα 4. Μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων

Η διασπορά των τιμών y_i με τυπική απόκλιση σ_y , προκαλεί διασπορά και στις τιμές των b_k και a_k , των k βέλτιστων ευθειών. Θεωρώντας ότι σε όλα τα σημεία των x_i η τυπική απόκλιση των y_i είναι ίδια ($\sigma_y = \text{σταθ}$), όπως επίσης και ότι η διασπορά των τιμών x_i είναι μηδέν ($\sigma_x = 0$), για τα τετράγωνα των τυπικών αποκλίσεων σ_b^2 και σ_a^2 οι σχετικοί υπολογισμοί (σελ. 73) οδηγούν στις σχέσεις

$$\sigma_b^2 = \frac{n\sigma_y^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad \sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sigma_y^2, \quad \left\{ \sigma_b^2 = \sigma_a^2 \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right\},$$

όπου η παράμετρος σ_y των τυχαίων τιμών y_i μπορεί να μετρηθεί σε κάποιο σημείο x_i , μετρώντας το y_i πολλές φορές. Ωστόσο, προτιμάται η τυπική απόκλιση σ_y να υπολογίζεται με άλλον τρόπο, που είναι βολικότερος. Έτσι, στο βαθμό που $\sigma_y = \text{σταθ}$, η τυπική απόκλιση σ_y μπορεί να υπολογιστεί και από τις αποκλίσεις των y_i από τη βέλτιστη ευθεία, δηλαδή τις διαφορές $d_i = y_i - a - bx_i$, αξιοποιώντας τη σχέση για την τυπική απόκλιση:

$$\sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{(n-2)},$$

η οποία με καλή προσέγγιση αποδίδει την τιμή της σ_y .

Τις σχέσεις για τις τυπικές αποκλίσεις σ_b^2 και σ_a^2 , αλλά σε λίγο διαφορετική μορφή τις

βλέπουμε και στον εργαστηριακό οδηγό. Ωστόσο, άβολα προτείνεται η σειρά υπολογισμού της σ_b^2 , δηλαδή μέσω της σ_a^2 , που συνήθως δεν ενδιαφέρει. Εντωμεταξύ, από την πρώτη σχέση η παράμετρος σ_b^2 μπορεί να υπολογιστεί άμεσα.

Καθώς ο προσδιορισμός των παραμέτρων της βέλτιστης ευθείας γίνεται μόνο σε ένα πείραμα, οι σταθερές a και b της βέλτιστης ευθείας, είναι τυχαίες, προσεγγίζουν τις πραγματικές τιμές με μία ορισμένη πιθανότητα κάλυψης, δηλαδή εμπεριέχουν μία αβεβαιότητα, η οποία εξαρτάται από τη διασπορά των τιμών y_i , δηλαδή την σ_y , αλλά και την πιθανότητα με την οποία αυτή η παράμετρος καλύπτεται, όταν ο αριθμός των πειραματικών σημείων, n , είναι σχετικά μικρός (βλ. τους συντελεστές Student, όπως και το ολικό σφάλμα στην τιμή της κλίσης).

9.2. Τυπική απόκλιση της κλίσης σε πειράματα όπου $\sigma_y \neq \text{σταθερά}$

Σε πολλά πειράματα, στον προτεινόμενο τρόπο γραμμικοποίησης της σχέσης, δεν τηρείται ο όρος $\sigma_y = \text{σταθερά}$, όπως, για παράδειγμα, στην **Άσκηση 4**, με επιλογές: $x = R^2$ και $y = T^2/4\pi$. Στην επιλογή $x = R^2$, τηρείται όρος $\sigma_x = 0$, αλλά δεν τηρείται ο όρος $\sigma_y = \text{σταθερά}$, στην επιλογή $y = T^2/4\pi$, καθώς, $\sigma_y = (\partial y / \partial T) \sigma_T = (2T/4\pi) \sigma_T$, όπου εδώ σταθερός όρος είναι μόνο ο όρος σ_T , δηλαδή η τυπική απόκλιση στις μετρήσεις του χρόνου. Βλέπουμε ότι εδώ η σ_y είναι ανάλογη του T . Συνεπώς, η σχέση για τη σ_y^2 που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε αυτές τις σημειώσεις, είναι αδύνατο να εφαρμοστούν.

Σε περιπτώσεις όπου $\sigma_y \neq \text{σταθερά}$, η τυπική απόκλιση στην κλίση υπολογίζεται από τη γενική σχέση για τη συνάρτηση πολλών τυχαίων μεταβλητών.

Καθώς $b = b(y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n)$, για την τυπική απόκλιση των y_i ισχύει σχέση:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_1} \right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_2} \right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_3} \right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial b}{\partial y_n} \right)^2 \sigma_{y_n}^2$$

όπου οι παράγωγοι στις παρενθέσεις μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση για την κλίση b

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} : \quad \frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{nx_k - \sum_{i=1}^n x_i}{D} ,$$

όπου τον παρανομαστή στη σχέση της b τον συμβολίσαμε D .

Η αντικατάστασή των μερικών παραγώγων στη γενική σχέση δίνει τελικά:

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y1}^2}{D^2} + \frac{\left[nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y2}^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{yn}^2}{D^2}$$

Προφανώς, εδώ είναι περιττός ο υπολογισμός των d_i , ενώ ο υπολογισμός του σ_y^2 γίνεται άμεσα από τον παραπάνω γενικό τύπο, ο οποίος εξειδικεύεται σε κάθε περίπτωση.

Συγκεκριμένα, στην Άσκηση 4, με επιλογές $x = R^2$ και $y = T^2/4\pi$, όπου

$$\sigma_{yi} = (\partial y / \partial T) \sigma_T = (2T/4\pi) \sigma_T,$$

η γενική σχέση

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y1}^2}{D^2} + \frac{\left[nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y2}^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{yn}^2}{D^2} ,$$

αποκτά τη μορφή:

$$\sigma_b^2 = 4\sigma_T^2 \times \left\{ \frac{\left[nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} y_1 + \frac{\left[nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} y_2 + \dots + \frac{\left[nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} y_n \right\}.$$

Καθώς τα y_i υπακούουν σε μία γραμμική σχέση, στην παραπάνω παράσταση μπορούν να αντικατασταθούν με τη μέση τους τιμή:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

Η αντικατάσταση αυτή δίνει:

$$\sigma_b^2 = 4\sigma_T^2 \bar{y} \left\{ \frac{\left[nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \right\} = 4\sigma_T^2 \bar{y} \frac{n \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}{D^2} = 4\sigma_T^2 \bar{y} \frac{n}{D},$$

όπου σ_T είναι η τυπική απόκλιση στη μέτρηση των χρόνων T_i .

Για παράδειγμα, αν το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις 10 περιόδους είναι 0,1 s, τότε της μίας περιόδου είναι 0,01 s. Για τη σ_T μπορούμε να θέσουμε το 1/3 των 0,01 s και να θεωρήσουμε ότι το μέγεθος αυτό καλύπτεται με πιθανότητα 68,3 % (πιθανότητα κάλυψης του ενός σ). Τελικά, στην παραπάνω σχέση: $\sigma_T = 0,0033$ s.

Σε καταστάσεις όπου $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \dots = \sigma_{yn} = \sigma_y$, η σχέση για τη σ_b^2 αποκτά τη γνώριμη μορφή που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε αυτές τις σημειώσεις:

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \sigma_y^2 + \frac{\left[nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \sigma_y^2 + \dots + \frac{\left[nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \sigma_y^2 = \frac{n \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}{D^2} \sigma_y^2 = \frac{n \sigma_y^2}{D}$$

10. Σφάλμα στην κλίση που οφείλεται στα σφάλματα των 2 μετρητών ($\sigma_y = 0$, $\sigma_x = 0$)

10.1. Σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με δύο ψηφιακούς μετρητές:

$$\Delta b_{op\gamma} = \pm b(\gamma_y + \gamma_x),$$

όπου το b υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελ. τετραγώνων. (σελ. 46).

ενώ οι όροι γ_y και γ_x είναι τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 ψηφιακών μετρητών:

$$\text{Accuracy } x: \gamma_x (\%) + h_x r_x \quad \text{και} \quad \text{Accuracy } y: \gamma_y (\%) + h_y r_y,$$

Εδώ το σφάλμα στην κλίση ($\Delta b_{op\gamma}$) είναι απαλλαγμένο από τους σταθερούς όρους $h_x r_x$ και $h_y r_y$.

10.2. Σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με δύο αναλογικούς μετρητές ($\sigma_x = \sigma_y = 0$)

$$\Delta b_{op\gamma} = \pm b \left(\frac{2\delta y_{av}}{(y_n - y_1)} + \frac{2\delta x_{av}}{(x_n - x_1)} \right) = \pm b \left(\frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{\psi_x}{(x_n - x_1)} \right),$$

όπου η κλίση b υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (σελ. 51).

Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα στην κλίση ($\Delta b_{op\gamma}$) είναι απαλλαγμένο από το κύριο σφάλμα του μετρητή των x_i , όπως και το κύριο σφάλμα του μετρητή των y_i .

10.3. Σε μικτές καταστάσεις, δηλαδή όταν ο ένας μετρητής είναι ψηφιακός, στην παραπάνω σχέση ο αντίστοιχος όρος αντικαθίσταται με το ποσοστιαίο σφάλμα του ψηφιακού οργάνου. Για παράδειγμα, όταν ο μετρητής των y_i είναι ψηφιακός, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\Delta b_{\text{οργ}} = \pm b \left(\gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right) = \pm b \left(\gamma_y + \frac{\psi_x}{x_n - x_1} \right), \text{ (σελ. 58)}.$$

Εδώ το σφάλμα στην κλίση ($\Delta b_{\text{οργ}}$) είναι απαλλαγμένο από το σταθερό όρο $h_y r_y$ του ψηφιακού μετρητή των y_i , όπως και από το κύριο σφάλμα του αναλογικού μετρητή των x_i .

11. Ολικό σφάλμα στην κλίση όταν η επαναληψιμότητα των τιμών y_i είναι κακή
($\sigma_y = \text{σταθ}$, οι 2 μετρητές: ψηφιακοί)

$$\Delta b_{\text{ολικο}} = \Delta b_{\text{οργ}} + \Delta b_{\text{τυχ}} = b(\gamma_x + \gamma_y) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \times \frac{\sum d_i^2}{(n-2)}}, P \geq \%99,7 \% \text{ (σελ. 50)},$$

όπου η κλίση b υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, $t_{n,p}$ είναι ο συντελεστής Student, $d_i = y_i - a - bx_i$, ενώ οι όροι γ_y και γ_x είναι τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 ψηφιακών μετρητών.

12. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε συνάρτηση τύπου $y = Bx$ ($\sigma_y = \text{σταθ}$, $\sigma_x = 0$)
(οι 2 μετρητές - ψηφιακοί)

Η κλίση της βέλτιστης πειραματικής ευθείας $y = bx$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \text{ (σελ. 64)},$$

ενώ το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1)}.$$

Το ολικό σφάλμα στην κλίση της βέλτιστης ευθείας, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Delta b_{\text{ολικο}} = \Delta b_{\text{οργ}} + \Delta b_{\text{τυχ}} = b(\gamma_y + \gamma_x) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-1)\sum x_i^2}} \quad (\Delta b_{\text{τυχ}} = t_{p,n} \sigma_b, P \geq 99,7 \%),$$

όπου γ_y και γ_x είναι τα ποσοστιαία σφάλματα των οργάνων, ενώ $d_i = y_i - bx_i$ (σελ. 68).

Γενική οδηγία

Σε πειράματα όπου το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού μετρητή δεν αναφέρεται, θεωρήστε ότι είναι

$$\text{Accuracy: } 1 \% + 4r \quad (r = 0,01, \quad h = 4, \quad r - \text{resolution}).$$

Σημείωση. Στο φυλλάδιο που διανέμεται περιλαμβάνεται μόνο ένα μικρό μέρος του κειμένου (η σύνοψη), που με τον ίδιο τίτλο βρίσκεται στην προσωπική ιστοσελίδα του Πεόγλου Βασιλείου, Επ. Καθηγητή του Τομέα Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ:

<http://dielectricsgroup.physics.ntua.gr/index.php/vasilios-peoglos/>