

A:

## Βασική αρχή της Μετρολογίας:

$$\Delta_{\text{ολικό}} = \Delta_{\text{οργάνου}} + \Delta_{\text{τυχαίο}}$$

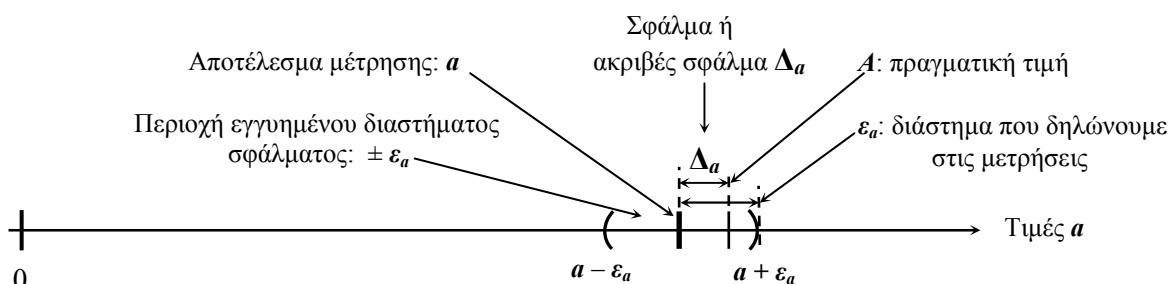
(Οι δύο όροι σφάλματος είναι ανεξάρτητοί και προσδιορίζονται χωριστά, θεωρώντας τον άλλο μηδέν)

B: Μετρήσεις με καλή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων

Σε άμεσες μετρήσεις με *καλή επαναληψιμότητα* των αποτελεσμάτων  $a_i$ , όπου η τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων είναι πολύ μικρότερη του σφάλματος του οργάνου, ( $\sigma \ll \Delta_{\text{οργ}}$ ), ως τιμή του μετρούμενου μεγέθους σημειώνεται η ένδειξη του οργάνου  $a$ , ενώ το σφάλμα μέτρησης καθορίζεται από το σφάλμα του οργάνου,  $\Delta_{\text{οργ}}$ , που σε *εγγυημένη* μορφή δηλώνεται από την κατασκευάστρια εταιρεία.

### Γ: Γενικός ορισμός του σφάλματος

Όπως και στα σφάλματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, η παράσταση του αποτελέσματος ως  $A = a \pm \varepsilon_a$  παριστάνει τη διπλή ανισότητα  $a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a$ , όπου  $A$  είναι η πραγματική τιμή, ενώ η  $\varepsilon_a$  είναι το εγγυημένο διάστημα σφάλματος. Επομένως, η πραγματική τιμή  $A$  βρίσκεται “κάπου” εντός του διαστήματος  $a \pm \varepsilon_a$  (βλ. Σχ. 1).



Σχήμα 1. Γενικός ορισμός του σφάλματος.

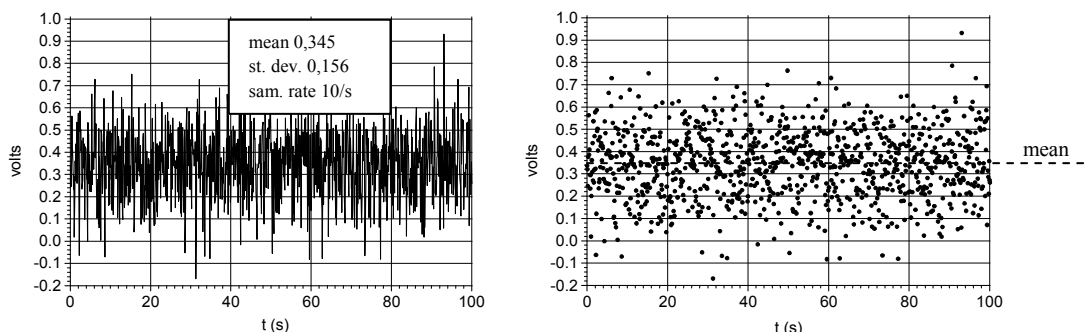
### Δ: Μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων

Σε μετρήσεις με *κακή επαναληψιμότητα* των αποτελεσμάτων  $a_i$ , με τυπική απόκλιση  $\sigma$ , ( $\sigma \geq \Delta_{\text{οργ}}$ ), ως τιμή του μετρούμενου μεγέθους σημειώνεται ο μέσος όρος των  $a_i$ , ( $\bar{a}$ ), ενώ στο εγγυημένο διάστημα σφάλματος του οργάνου ( $\Delta_{\text{οργ}}$ ) προστίθεται και η *αβεβαιότητα* της μέσης τιμής:

1. Για μεγάλα  $n$  ( $n \geq 200$ ) και  $P \geq 99,7\%$ ,  $A = \bar{a} \pm (\Delta_{\text{οργ}} + 3\sigma_\mu)$ , όπου  $\sigma_\mu$  - τυπικό σφάλμα, που

υπολογίζεται ως  $\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}}$  ή  $\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum (a_i - A)^2}{n^2}}$ , όταν η πραγματική τιμή  $A$  είναι γνωστή.

2. Για μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ) και  $P \geq 99,7\%$ ,  $A = \bar{a} \pm (\Delta_{\text{οργ}} + t_{n,p}\sigma_\mu)$ ,  $t_{n,p}$  - συντελεστής Student.



Σχήμα 2. Εικόνα ενός έντονα θορυβουμένου ηλεκτρικού σήματος στο καταγραφικό του υπολογιστή.

Συμπληρωματικές σημειώσεις προς τον εργαστηριακό οδηγό (σφάλμα απλής μέτρησης, μετρητικών οργάνων, προσεγγιστικών αριθμών εν γένει, κ.λπ.), Β. Πεόγλος

## Σύνοψη των κυριότερων αποτελεσμάτων

### 1. Σε άμεσες μετρήσεις με αναλογικά και ψηφιακά όργανα:

Έστω ότι η πραγματική τιμή κάποιου αμετάβλητου στο χρόνο μεγέθους είναι  $A$ , ενώ ο υπολογισμός ή η μέτρησή του έδωσε την τιμή  $a$ . Συνήθως,  $a \neq A$ .

**1.1.** Το διάστημα  $\pm \varepsilon_a$ , γύρω από την τιμή  $a$ , εντός του οποίου με σιγουριά 100 % βρίσκεται η πραγματική τιμή  $A$  ορίζεται ως εγγυημένο διάστημα σφάλματος (σελ. 12).

**1.2.** Πίσω από τη συμβολική παράσταση του αποτελέσματος μέτρησης,  $A = a \pm \varepsilon_a$ , κρύβονται οι 2 βασικές ανισότητες της Θεωρίας Σφαλμάτων:

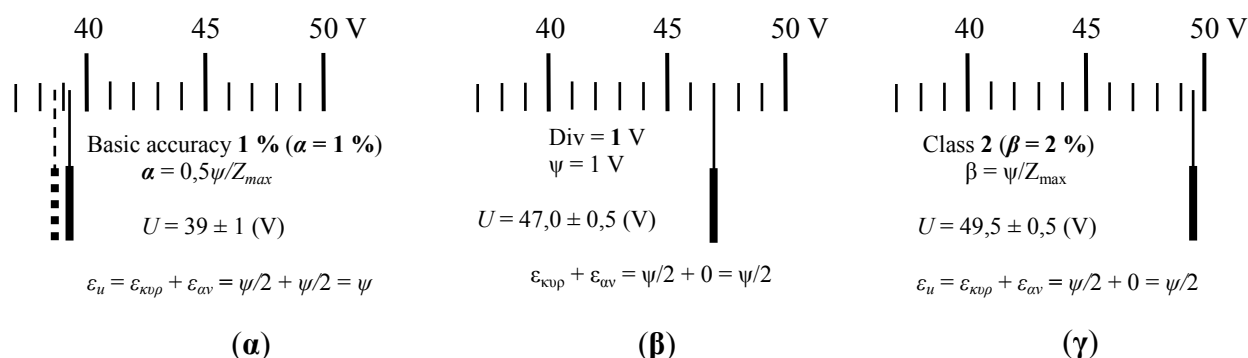
$$a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a, \text{ (σελ. 12).}$$

**2.** Στους αναλογικούς μετρητές το εγγυημένο διάστημα σφάλματος δηλώνεται από την κατασκευάστρια εταιρεία, συνήθως σε κωδικοποιημένη μορφή. Το “σφάλμα” αυτό επεκτείνεται σε όλη την κλίμακα του οργάνου, προκαλώντας μείωση της ακρίβειας (μεγάλο σχετικό σφάλμα) σε μικρές τιμές της κλίμακας (σελ. 15). Η εγγύηση ακρίβειας διαρκεί 2 έτη, μετά το πέρας των οποίων ο μετρητής πρέπει να διακριβωθεί εκ’ νέου.

**2.1.** Στους αναλογικούς μετρητές η ένδειξη στρογγυλοποιείται (ψηφιοποιείται, σημειώνεται η κοντινότερη χαρακιά), με βήμα  $\psi/2$ , όπου  $\psi$  είναι η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας του. Κλάσματα μικρότερα της  $\psi/2$  δεν σημειώνονται στην τιμή. Η πρακτική αυτή δημιουργεί το λεγόμενο σφάλμα ανάγνωσης, άνω όριο του οποίου είναι  $\psi/2$  (σελ. 15).

**2.2.** Στα αναλογικά όργανα, το σφάλμα οργάνου έχει 2 συνιστώσες: το σφάλμα ανάγνωσης ( $\psi/2$ ) και το κύριο σφάλμα του μετρητή,  $\psi/2$  και αυτό. Σε μία τυχαία θέση του δείκτη (Σχ. 3α), το εγγυημένο διάστημα σφάλματος είναι

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\kappa\upsilon\rho} + \varepsilon_{\alpha\nu} = \psi/2 + \psi/2 = \psi.$$



**Σχήμα 3.** Σφάλμα του αναλογικού οργάνου και ανάγνωση της ένδειξης με στρογγυλοποίηση.

Όταν, όμως, το σφάλμα ανάγνωσης είναι  $\mathbf{0}$  ( $\varepsilon_{\alpha\nu} = \mathbf{0}$ ), δηλαδή ο δείκτης βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά “ακριβώς” (Σχ. 3β), ή στη μέση (Σχ. 3γ), όπου αδυνατούμε να επιλέξουμε την κοντινότερη χαρακιά, τότε στο σφάλμα συμβάλλει μόνο το κύριο σφάλμα του οργάνου:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\kappa\upsilon\rho} + \mathbf{0} = \psi/2.$$

**2.3.** Συνήθως,  $\varepsilon_{\text{οργ}} = \psi$ . Στα όργανα όπου  $\varepsilon_{\text{οργ}} \neq \psi$ , το σφάλμα οργάνου προσδιορίζεται από το γινόμενο  $\beta Z_{\text{max}}$ , όπου  $\beta$  είναι η κατηγορία του οργάνου (Class  $\beta$ ) και  $Z_{\text{max}}$  είναι η μέγιστη τιμή της κλίμακας του.

**3. Στα ψηφιακά όργανα το σφάλμα ανάγνωσης είναι μηδέν.** Η ολίσθηση του μηδενός ελέγχεται (εξουδετερώνεται) ηλεκτρονικά, πριν από κάθε κύκλο μέτρησης που διαρκεί 0,33 s. Το κύριο σφάλμα ή το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού οργάνου δηλώνεται στο συνοδευτικό βιβλιαράκι και συνήθως η δήλωση έχει τη μορφή:

$$\text{Accuracy: } \gamma (\%) + hr,$$

όπου  $r$  είναι διακριτική ικανότητα (resolution) της επιλεγμένης κλίμακας ή η μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης της παριστάμενης στην ψηφιακή οθόνη τιμής, ενώ το γινόμενο  $hr$  είναι το άνω όριο του υπολοίπου της αυτόματης ρύθμισης του μηδενός.

Το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού οργάνου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_a = a\gamma + hr,$$

όπου  $a$  είναι η ένδειξή του.

Ωστόσο η μέτρηση της μεταβολής του σήματος κατά  $\Delta a$  ( $\Delta a = a_2 - a_1$ ), γίνεται με εγγυημένο διάστημα

$$\varepsilon_{\Delta a} = \gamma \Delta a,$$

το οποίο είναι απαλλαγμένο από τον όρο  $hr$ , καθώς ο όρος αυτός έχει ίδια τιμή και πρόσημο στις τιμές  $a_2$  και  $a_1$ . Στην περίπτωση αυτή τα σφάλματα αφαιρούνται όπως και οι 2 τιμές, δηλαδή αλγεβρικά:

$$\varepsilon_{\Delta a} = (a_2\gamma + hr) - (a_1\gamma + hr) = \gamma \Delta a.$$

Όταν οι μεταβολές της ένδειξης  $a$  είναι πολύ μικρές ( $\gamma \Delta a < r$ ), το γινόμενο  $\gamma \Delta a$  αγνοείται και για εγγυημένο διάστημα σφάλματος της μεταβολής  $\Delta a$  σημειώνεται η τιμή της διακριτικής ικανότητας  $r$  (σελ. 18):

$$\varepsilon_{\Delta a} = r.$$

#### 4. Διάδοση των σφαλμάτων σε μετρήσεις με καλή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων

Έστω, ότι οι τιμές  $a$  και  $b$  μετρήθηκαν άμεσα, με σταθερές ενδείξεις των οργάνων και εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$ , αντίστοιχα. Σε έμμεσες μετρήσεις, όπου οι τιμές και τα πρόσημο των ακριβή σφαλμάτων  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι άγνωστα:

**4.1.** Στην πρόσθεση και αφαίρεση δύο προσεγγιστικών αριθμών,  $u = a \pm b$ , προκειμένου το διάστημα σφάλματος να είναι εγγυημένο, τα εγγυημένα διαστήματα  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$  τα προσθέτουν αριθμητικά:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b, \text{ (σελ. 76).}$$

**4.2.** Στον πολλαπλασιασμό δύο προσεγγιστικών αριθμών,  $u = ab$ , το εγγυημένο διάστημα σφάλματος,  $\varepsilon_u$ , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_u = |a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a \text{ (σελ. 77).}$$

**4.3.** Στη διαίρεση δύο προσεγγιστικών αριθμών,  $u = a/b$ , το εγγυημένο διάστημα σφάλματος,  $\varepsilon_u$ , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_u = \frac{|a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a}{b^2} \text{ (σελ. 77).}$$

**4.4** Για το σχετικό σφάλματα,  $\delta_u$ , γινομένου και διαίρεσης, ισχύει η σχέση

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b, \text{ όπου } \delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u}, \quad \delta_a = \frac{\varepsilon_a}{a} \text{ και } \delta_b = \frac{\varepsilon_b}{b} \text{ (σελ. 25).}$$

Εγγυημένο διάστημα σφάλματος και τυπικό σφάλμα μ.τ. μερικών συναρτήσεων (σελ. 102)

Συνάρτηση $u$	Εγγυημένο διάστημα σφάλματος $\varepsilon_u$	Τυπικό σφάλμα $\sigma_u$ της μέσης τιμής με πιθανότητα κάλυψης 68,27 % ( $n = \infty$ )
Πρόσθεση $u = x + y$	$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$(\sigma_u)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
Διαφορά $u = x - y$	$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$(\sigma_u)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
Γενικά $u = ax \pm by \pm cz \pm$	$\varepsilon_u = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z +$	$(\sigma_u)^2 = (a\sigma_x)^2 + (b\sigma_y)^2 + (c\sigma_z)^2$
Πολλαπλασιασμός με σταθερά $u = kx$	$\varepsilon_u =  k  \varepsilon_x$	$\sigma_u =  k  \sigma_x$
Δύναμη $u = x^n$	$\varepsilon_u =  nx^{n-1}  \varepsilon_x$	$\sigma_u =  nx^{n-1}  \sigma_x$
Γινόμενο $u = xy$	$\delta_u = \delta_x + \delta_y$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα
Πηλίκο $u = x/y$	$\delta_u = \delta_x + \delta_y$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα
Γινόμενο δυνάμεων $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$	$\delta_u = \alpha\delta_x + \beta\delta_y + \gamma\delta_z +$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\alpha\delta_x)^2 + (\beta\delta_y)^2 + (\gamma\delta_z)^2$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα
Εκθετικό $u = e^{ax}$	$\varepsilon_u =  a  e^{ax} \varepsilon_x$	$\sigma_u =  a  e^{ax} \sigma_x$
Ημίτονο $u = a \sin(\beta x)$	$\varepsilon_u = a\beta  \cos(\beta x)  \varepsilon_x$	$\sigma_u = a\beta  \cos(\beta x)  \sigma_x$
Συνημίτονο $u = a \cos(\beta x)$	$\varepsilon_u = a\beta  \sin(\beta x)  \varepsilon_x$	$\sigma_u = a\beta  \sin(\beta x)  \sigma_x$
Συνάρτηση πολλών μεταβλητών $u = f(x, y, z, \dots)$	$\varepsilon_f = \left  \frac{\partial f}{\partial x} \right  \varepsilon_x + \left  \frac{\partial f}{\partial y} \right  \varepsilon_y +$ όπου $X = x \pm \varepsilon_x, Y = y \pm \varepsilon_y, \dots$	$\sigma_f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 +$ όπου $X = \bar{x} \pm \sigma_x, Y = \bar{y} \pm \sigma_y, \dots$ και $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$

5. Στη συνάρτηση  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  προσεγγιστικών μεταβλητών  $x_i$ , που μετρήθηκαν άμεσα, με εγγυημένα σφάλματα  $\varepsilon_i$ , το εγγυημένο διάστημα σφάλματος της  $f$ ,  $\varepsilon_f$ , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \varepsilon_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \varepsilon_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \varepsilon_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| \varepsilon_3 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \varepsilon_n \quad (\text{σελ. 78}).$$

6. **Διαφορική μέθοδος μέτρησης.** Σε μικρές τιμές της κλίμακας του οργάνου, όπως, για παράδειγμα,  $z \approx 0,1Z_{max}$ , η ακρίβεια μέτρησης είναι μικρή, η οποία, όμως, σε *διαφορικές μετρήσεις* μπορεί να βελτιωθεί από 3 - 4 φορές (σελ. 36).

Στη διαφορική μέθοδο η *βασική μέτρηση* συμπληρώνεται με μία *βοηθητική*, που είναι 2 φορές μικρότερη. Παρότι η ακρίβεια της βοηθητικής μέτρησης είναι ακόμη χαμηλότερη, στις διαφορές των 2 τιμών τα σφάλματα είναι μικρότερα, καθώς εδώ αποβάλλονται μερικά βασικά σφάλματα των οργάνων.

7. Σε άμεσες μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων  $a_i$  (τυχαίες τιμές):

7.1. Όλες οι μαθηματικές σχέσεις που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό αναφέρονται για  $n \geq 200$  (!), οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν και σε μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ), αλλά τότε το σφάλμα της μέσης τιμής (τυπικό σφάλμα) έχει *απροσδιόριστη (άγνωστη)* πιθανότητα κάλυψης.

7.2 Σε *έμμεσες* μετρήσεις της  $y$ , όπου η  $y$  είναι συνάρτηση  $n$  ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , που μετρήθηκαν άμεσα, με τυπικά σφάλματα  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , το τυπικό σφάλμα της  $y$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_y = \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_3} \right)^2 \sigma_3^2 + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_n^2},$$

η οποία μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής των σφαλμάτων.

Όταν κάποια τυπικά σφάλμα είναι αλληλοεξαρτώμενα και συσχετισμένα μεταξύ τους, τότε η υπόριξη παράσταση πρέπει να συμπληρώνεται με όρους τύπου

$$2r_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j} \sigma_i \sigma_j,$$

όπου  $r_{ij}$  είναι ο συντελεστής συσχέτισης των δύο εξαρτώμενων σφαλμάτων.

7.3. Σε *μικρές τιμές του  $n$*  ( $3 < n < 10$ ) και άγνωστη την πραγματική τιμή, το τυπικό σφάλμα,  $\sigma_\mu$ , υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}},$$

ενώ για να αποκτήσει μία συγκεκριμένη πιθανότητα κάλυψης  $P$ , η ποσότητα  $\sigma_\mu$  πρέπει να πολλαπλασιαστεί στον κατάλληλο συντελεστή Student  $t_{n,p}$  (Πίνακας 5, σελ. 104).

Σε *άμεσες μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων  $a_i$* , όπου  $\sigma \geq \Delta_{op}$ , στο σφάλμα οργάνου προστίθεται η *αβεβαιότητα της μέσης τιμής* ( $3\sigma_\mu$  ή  $t_{n,p}\sigma_\mu$ ).

7.4. Για μεγάλα  $n$  ( $n \geq 200$ ) και  $P \geq 99,7\%$ , το αποτέλεσμα μέτρησης το παρουσιάζουμε σε μορφή:

$$A = \bar{a} \pm (\varepsilon_{op} + 3\sigma_\mu), \quad P \geq \%99,7\%.$$

7.4.1. Για μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ) και  $P \geq 99,7\%$ , το αποτέλεσμα μέτρησης το παρουσιάζουμε σε μορφή:

$$A = \bar{a} \pm (\varepsilon_{op} + t_{n,p}\sigma_\mu), \quad n = (\dots), \quad P \geq \%99,7\%,$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student (βλ. Πίνακα συντελεστών Student).

**Πίνακας συντελεστών Student (σελ. 104)**

<i>n</i>	<i>P</i>					
	50 %	68,27 % (1σ)	95,45 % (2σ)	99 %	99,73 % (3σ)	99,9 %
2	1,000	1,84	13,97	63,66	235,8	636,6
3	0,916	1,32	4,53	8,92	19,21	31,60
4	0,765	1,20	3,31	5,84	9,22	12,94
5	0,741	1,14	2,87	4,60	6,62	8,610
6	0,727	1,11	2,65	4,03	5,51	6,859
7	0,718	1,09	2,52	3,71	4,90	5,959
8	0,711	1,08	2,43	3,50	4,53	5,405
9	0,706	1,07	2,37	3,36	4,28	5,041
10	0,703	1,06	2,32	3,25	4,09	4,781
11	0,700	1,05	2,28	3,17	3,96	4,587
12	0,697	1,05	2,25	3,11	3,85	4,487
13	0,695	1,04	2,23	3,05	3,76	4,138
14	0,694	1,04	2,21	3,01	3,69	4,221
15	0,692	1,04	2,20	2,98	3,64	4,140
16	0,691	1,03	2,18	2,95	3,59	4,073
17	0,690	1,03	2,17	2,92	3,54	4,015
18	0,689	1,03	2,16	2,90	3,51	3,965
19	0,688	1,03	2,15	2,88	3,48	3,922
20	0,688	1,03	2,14	2,86	3,45	3,883
21	0,687	1,03	2,13	2,85	3,42	3,850
25	0,685	1,02	2,11	2,79	3,33	3,745
30	0,683	1,02	2,09	2,75	3,27	3,659
35	.....	1,01	2,07	2,72	3,23	.....
40	.....	1,01	2,06	2,70	3,20	.....
45	.....	1,01	2,06	2,69	3,18	.....
50	.....	1,01	2,05	2,68	3,16	.....
100	.....	1,005	2,05	2,63	3,007	.....
∞	0,674	1,000	2,000	2,576	3,000	3,291

**8. Ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης των τυπικών σφαλμάτων**

Σε μία έμμεση μέτρηση, όπου συμμετέχουν προσεγγιστικά μεγέθη με διαφορετική πιθανότητα κάλυψης του σφάλματος της μέσης τιμής (διαφορετικά confidence level), πριν υπολογιστεί το σφάλμα της σχέσης, τα σφάλματα πρέπει να αποκτήσουν ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης (σελ. 35).

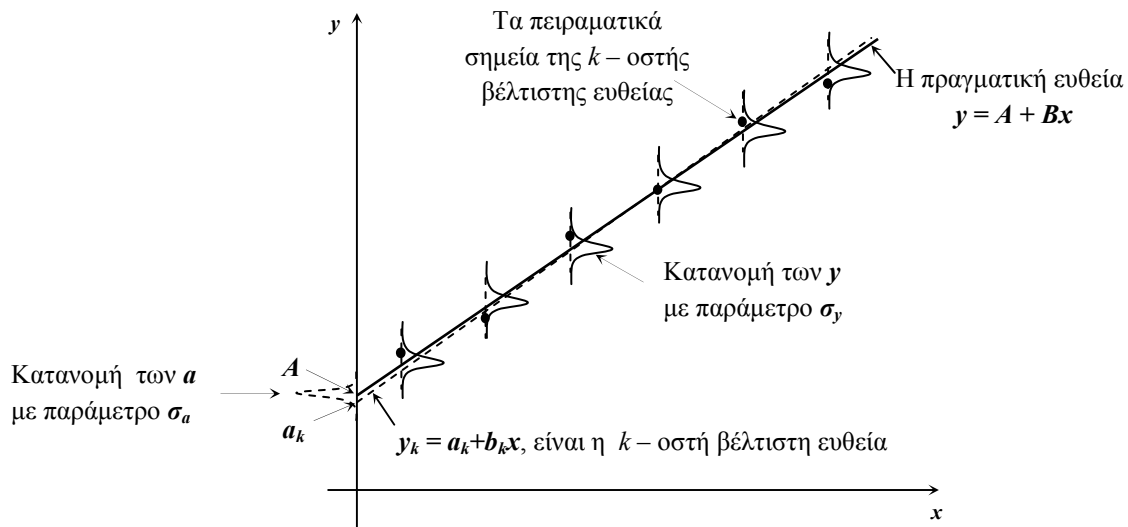
**9. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε συνάρτηση τύπου  $y = A + Bx$**

**9.1.** Ο πειραματικός προσδιορισμός των σταθερών *A* και *B* της γραμμικής σχέσης  $y = A + Bx$  γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όταν οι τιμές  $y_i$  παρουσιάζουν διασπορά με τυπική απόκλιση  $\sigma_y$ . Αν η διασπορά στις τιμές των  $x_i$  είναι μηδέν, δηλαδή  $\sigma_x = 0$ , οι σταθερές *a* και *b* της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = a + bx$  (όχι της πραγματικής:  $y = A + Bx$ ) υπολογίζονται όπως και στον εργαστηριακό οδηγό:

$$a = \frac{(\sum y_i) \times (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \times (\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Σε μετρήσεις όπου στις τιμές των  $y_i$  παρατηρείται σταθερή διασπορά, (ίδιες γκαουσιανές στο Σχ. 4, δηλαδή  $\sigma_y = \text{σταθ}$ ), οι παράμετροι  $a$  και  $b$  της βέλτιστης ευθείας έχουν τυχαίο χαρακτήρα, καθώς μία επανάληψη του πειράματος θα οδηγήσει σε λίγο διαφορετικές τιμές των  $a$  και  $b$ . Συνεπώς οι σταθερές  $A$  και  $B$  της βέλτιστης ευθείας δεν ταυτίζονται με τις πραγματικές τιμές  $A$  και  $B$  της πραγματικής ευθείας  $y = A+Bx$ .

Καθώς ο αριθμός των πειραματικών σημείων δεν μπορεί να είναι μεγάλος, στο μοντέλο της μεθόδου, προκειμένου να βρεθούν οι σταθερές  $A$  και  $B$ , θεωρείται ότι το πείραμα επαναλαμβάνεται  $k$  φορές, υπολογίζονται οι παράμετροι των  $a_k$  και  $b_k$  των  $k$  ευθειών, ενώ οι τιμές  $A$  και  $B$  υπολογίζονται ως μέσοι όροι των  $a_k$  και  $b_k$ , αντίστοιχα (Σχ.4). Εδώ ο αριθμός  $k$  μπορεί να είναι μεγάλος ή πολύ μεγάλος.



Σχήμα 4. Μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων

Η διασπορά των τιμών  $y_i$  με τυπική απόκλιση  $\sigma_y$ , προκαλεί διασπορά και στις τιμές των  $b_k$  και  $a_k$ , των  $k$  βέλτιστων ευθειών. Θεωρώντας ότι σε όλα τα σημεία των  $x_i$  η τυπική απόκλιση των  $y_i$  είναι ίδια ( $\sigma_y = \text{σταθ}$ ), όπως επίσης και ότι η διασπορά των τιμών  $x_i$  είναι μηδέν ( $\sigma_x = 0$ ), για τα τετράγωνα των τυπικών αποκλίσεων  $\sigma_b^2$  και  $\sigma_a^2$  οι σχετικοί υπολογισμοί (σελ. 73-74) οδηγούν στις σχέσεις

$$\sigma_b^2 = \frac{n\sigma_y^2}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \quad \sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \sigma_y^2, \quad \left\{ \sigma_b^2 = \sigma_a^2 \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right\},$$

όπου η παράμετρος  $\sigma_y$  των τυχαίων τιμών  $y_i$  μπορεί να μετρηθεί σε κάποιο σημείο  $x_i$ , μετρώντας το  $y_i$  πολλές φορές. Ωστόσο, προτιμάται η τυπική απόκλιση  $\sigma_y$  να υπολογίζεται με άλλον τρόπο, που είναι βολικότερος. Έτσι, στο βαθμό που  $\sigma_y = \text{σταθ}$ , η τυπική απόκλιση  $\sigma_y$  μπορεί να υπολογιστεί και από τις αποκλίσεις των  $y_i$  από τη βέλτιστη ευθεία, δηλαδή τις διαφορές  $d_i = y_i - a - bx_i$ , αξιοποιώντας τη σχέση για την τυπική απόκλιση:

$$\sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{(n-2)},$$

η οποία με καλή προσέγγιση αποδίδει την τιμή της  $\sigma_y$ .

Τις σχέσεις για τις τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_b^2$  και  $\sigma_a^2$ , αλλά σε λίγο διαφορετική μορφή τις βλέπουμε και στον εργαστηριακό οδηγό. Ωστόσο, άβολα προτείνεται η σειρά υπολογισμού της

$\sigma_b^2$ , δηλαδή μέσω της  $\sigma_a^2$ , που συνήθως δεν ενδιαφέρει. Εντωμεταξύ, από την πρώτη σχέση η παράμετρος  $\sigma_b^2$  μπορεί να υπολογιστεί άμεσα.

Καθώς ο προσδιορισμός των παραμέτρων της βέλτιστης ευθείας γίνεται μόνο σε ένα πείραμα, οι σταθερές  $a$  και  $b$  της βέλτιστης ευθείας, είναι τυχαίες, προσεγγίζουν τις πραγματικές τιμές με μία ορισμένη πιθανότητα κάλυψης, δηλαδή εμπεριέχουν μία αβεβαιότητα, η οποία εξαρτάται από τη διασπορά των τιμών  $y_i$ , δηλαδή την  $\sigma_y$ , αλλά και την πιθανότητα με την οποία αυτή η παράμετρος καλύπτεται, όταν ο αριθμός των πειραματικών σημείων,  $n$ , είναι σχετικά μικρός (βλ. τους συντελεστές Student, όπως και το ολικό σφάλμα στην τιμή της κλίσης).

## 9.2. Τυπική απόκλιση της κλίσης σε πειράματα όπου $\sigma_y \neq \text{σταθερά}$

Σε πολλά πειράματα, στον προτεινόμενο τρόπο γραμμικοποίησης της σχέσης, δεν τηρείται ο όρος  $\sigma_y = \text{σταθερά}$ , όπως, για παράδειγμα, στην **Άσκηση 4**, με επιλογές:  $x = R^2$  και  $y = T^2/4\pi$ . Στην επιλογή  $x = R^2$ , τηρείται όρος  $\sigma_x = 0$ , αλλά δεν τηρείται ο όρος  $\sigma_y = \text{σταθερά}$  στην επιλογή  $y = T^2/4\pi$ , καθώς,  $\sigma_y = (\partial y/\partial T) \sigma_T = (2T/4\pi)\sigma_T$ , όπου εδώ σταθερός όρος είναι μόνο ο όρος  $\sigma_T$ , δηλαδή η τυπική απόκλιση στις μετρήσεις του χρόνου. Βλέπουμε ότι εδώ η  $\sigma_y$  είναι ανάλογη του  $T$ . Συνεπώς, η σχέση για τη  $\sigma_y^2$ , που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε αυτές τις σημειώσεις, είναι αδύνατο εδώ να εφαρμοστούν.

Σε περιπτώσεις όπου  $\sigma_y \neq \text{σταθερά}$ , η τυπική απόκλιση στην κλίση υπολογίζεται από τη σχέση για τη συνάρτησης πολλών τυχαίων μεταβλητών:

Έτσι, καθώς  $b = b(y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n)$ , για την τυπική απόκλιση των  $y_i$  ισχύει η γενική σχέση:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial b}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2$$

όπου οι παράγωγοι στις παρενθέσεις μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση για την κλίση  $b$ :

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \text{Έτσι: } \frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{nx_k - \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{nx_k - \sum_{i=1}^n x_i}{D}$$

όπου τον παρανομαστή στις σχέσεις τον συμβολίσαμε  $D$ .

Η αντικατάστασή των μερικών παραγώγων στη γενική σχέση δίνει τελικά:

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_1}^2}{D^2} + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_2}^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_n}^2}{D^2}$$

Προφανώς, εδώ είναι περιττός ο υπολογισμός των  $d_i$ , ενώ ο υπολογισμός του  $\sigma_y^2$  γίνεται άμεσα από τον παραπάνω γενικό τύπο, ο οποίος εξειδικεύεται σε κάθε περίπτωση.

Συγκεκριμένα, στην Άσκηση 4, με επιλογές  $x = R^2$  και  $y = T^2/4\pi$ , όπου

$$\sigma_{y_i} = (\partial y/\partial T) \sigma_T = (2T/4\pi) \sigma_T,$$

η γενική σχέση

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_1}^2}{D^2} + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_2}^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_n}^2}{D^2},$$

αποκτά τη μορφή:

$$\sigma_b^2 = 4\sigma_T^2 \times \left\{ \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} y_1 + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} y_2 + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} y_n \right\}.$$

Καθώς τα  $y_i$  μεταβάλλονται γραμμικά, στην παραπάνω σχέση μπορούν να αντικατασταθούν με τη μέση τους τιμή:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

Η αντικατάσταση αυτή δίνει:

$$\sigma_b^2 = 4\sigma_T^2 \bar{y} \left\{ \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \right\} = 4\sigma_T^2 \bar{y} \frac{n \left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}{D^2} = 4\sigma_T^2 \bar{y} \frac{n}{D},$$

όπου  $\sigma_T$  είναι η τυπική απόκλιση στη μέτρηση των χρόνων  $T_i$ .

Για παράδειγμα, αν το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις 10 περιόδους είναι 0,1 s, τότε της μίας περιόδου είναι 0,01 s. Για τη  $\sigma_T$  μπορούμε να θέσουμε το 1/3 των 0,01 s και να θεωρήσουμε ότι το μέγεθος αυτό καλύπτεται με πιθανότητα 68,3 % (πιθανότητα κάλυψης του ενός  $\sigma$ ). Τελικά, στην παραπάνω σχέση:  $\sigma_T = 0,0033$  s.

Σε καταστάσεις όπου  $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \dots = \sigma_{yn} = \text{σταθ}$ , η σχέση για τη  $\sigma_y^2$  αποκτά τη γνώριμη μορφή που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε αυτές τις σημειώσεις:

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \sigma_y^2 + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \sigma_y^2 + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \sigma_y^2 = \frac{n \left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}{D^2} \sigma_y^2 = \frac{n\sigma_y^2}{D}$$

## 10. Σφάλμα στην κλίση που οφείλεται στα σφάλματα των 2 μετρητών ( $\sigma_y = 0$ , $\sigma_x = 0$ )

### 10.1. Σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με δύο ψηφιακούς μετρητές:

$$\Delta b_{\text{οργ}} = \pm b(\gamma_y + \gamma_x),$$

όπου το  $b$  υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελ. τετραγώνων. (σελ. 46).

ενώ οι όροι  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$  είναι τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 ψηφιακών μετρητών:

$$\text{Accuracy } x: \gamma_x (\%) + h_x r_x \quad \text{και} \quad \text{Accuracy } y: \gamma_y (\%) + h_y r_y,$$

Εδώ το σφάλμα στην κλίση ( $\Delta b_{\text{οργ}}$ ) είναι απαλλαγμένο από τους σταθερούς όρους  $h_x r_x$  και  $h_y r_y$ .

### 10.2. Σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με δύο αναλογικούς μετρητές ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ )

$$\Delta b_{\text{οργ}} = \pm b \left( \frac{2\delta y_{\text{av}}}{(y_n - y_1)} + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{(x_n - x_1)} \right) = \pm b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{\psi_x}{(x_n - x_1)} \right),$$

όπου η κλίση  $b$  υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (σελ. 51).

Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα στην κλίση ( $\Delta b_{\text{οργ}}$ ) είναι απαλλαγμένο από το κύριο σφάλμα του μετρητή των  $x_i$ , όπως και το κύριο σφάλμα του μετρητή των  $y_i$ .

**10.3. Σε μικτές καταστάσεις**, δηλαδή όταν ο ένας μετρητής είναι ψηφιακός, στην παραπάνω σχέση ο αντίστοιχος όρος αντικαθίσταται με το ποσοστιαίο σφάλμα του ψηφιακού οργάνου. Για παράδειγμα, όταν ο μετρητής των  $y_i$  είναι ψηφιακός, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\Delta b_{οργγ} = \pm b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right) = \pm b \left( \gamma_y + \frac{\psi_x}{x_n - x_1} \right), \text{ (σελ. 58).}$$

Εδώ το σφάλμα στην κλίση ( $\Delta b_{οργγ}$ ) είναι απαλλαγμένο από το σταθερό όρο  $h_y r_y$  του ψηφιακού μετρητή των  $y_i$ , όπως και από το κύριο σφάλμα του αναλογικού μετρητή των  $x_i$ .

**11. Ολικό σφάλμα στην κλίση όταν η επαναληψιμότητα των τιμών  $y_i$  είναι κακή**  
( $\sigma_y = \text{σταθ}$ , οι 2 μετρητές: ψηφιακοί)

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργγ} + \Delta b_{τωχ} = b(\gamma_x + \gamma_y) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \times \frac{\sum d_i^2}{(n-2)}}, P \geq \%99,7 \% \text{ (σελ. 50),}$$

όπου η κλίση  $b$  υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων,  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student,  $d_i = y_i - a - bx_i$ , ενώ οι όροι  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$  είναι τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 ψηφιακών μετρητών.

**12. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε συνάρτηση τύπου  $y = Bx$  ( $\sigma_y = \text{σταθ}$ ,  $\sigma_x = 0$ )**  
(οι 2 μετρητές - ψηφιακοί)

Η κλίση της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = bx$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \text{ (σελ. 64),}$$

ενώ το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1)}.$$

Το συνολικό σφάλμα στην κλίση της βέλτιστης ευθείας, υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργγ} + \Delta b_{τωχ} = b(\gamma_y + \gamma_x) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-1)\sum x_i^2}} \quad (\Delta b_{τωχ} = t_{p,n}\sigma_b, P \geq 99,7 \%),$$

όπου  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$  είναι τα ποσοστιαία σφάλματα των οργάνων, ενώ  $d_i = y_i - bx_i$  (σελ. 68).

### Γενική οδηγία

Σε πειράματα όπου το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού μετρητή δεν αναφέρεται, θεωρήστε ότι είναι

$$\text{Accuracy: } 1 \% + 4r \text{ (} \gamma = 0,01, h = 4, r - \text{resolution).}$$

## 12. Σχηματική παράσταση της βασικής αρχής της Μετρολογίας

Σχηματικά, η βασική αρχή της Μετρολογίας:

$$\Delta_{\text{ολικό}} = \Delta_{\text{οργάνου}} + \Delta_{\text{τυχάιος}}$$

αποτυπώνεται στο ακόλουθο Σχήμα:



Σχηματική παράσταση της βασικής αρχής της Μετρολογίας.

**Σημείωση.** Στο φυλλάδιο που διανέμεται περιλαμβάνεται μόνο ένα μικρό μέρος του κειμένου (η σύνοψη), που με τον ίδιο τίτλο βρίσκεται στην προσωπική ιστοσελίδα του Πεόγλου Βασιλείου, Επ. Καθηγητή του Τομέα Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ:

<http://dielectricsgroup.physics.ntua.gr/index.php/vasilios-peoglos/>

## 2. Γενικός ορισμός του σφάλματος

Ο ορισμός αυτός αφορά άμεσα το σφάλμα *οποιασδήποτε προσεγγιστικής τιμής*, τα σφάλματα των οργάνων, τα σφάλματα μαθηματικής προέλευσης, όπως και τα σφάλματα των *έμμεσων μετρήσεων*, όπου γίνεται μαθηματική επεξεργασία των προσεγγιστικών τιμών που ελήφθησαν σε *άμεσες* μετρήσεις σε συνθήκες *μηδενικής (αμελητέας) διασποράς* των αποτελεσμάτων. Τονίζουμε, ότι η μαθηματική επεξεργασία αυτών των σφαλμάτων, καθώς είναι *εγγυημένα*, γίνεται με τρόπο διάφορο από την επεξεργασία των τυχαίων!

Καταρχάς, σε συνθήκες κακής επαναληψιμότητας των αποτελεσμάτων μέτρησης, για να είναι η ανάλυση του σφάλματος σχετικά πλήρης, πρέπει να προσδιοριστούν οι όροι της σχέσης:

$$\Delta_{ολικό} = \Delta_{οργ} + \Delta_{τυχ}, \quad (\text{σε μεγάλα } n: \Delta_{τυχ} = 3\sigma_{\mu}), \quad P \geq \%99,7 \%,$$

όπου οι 2 όροι,  $\Delta_{οργ}$  και  $\Delta_{τυχ}$ , καθώς έχουν διαφορετικό ορισμό και φύση, προσδιορίζονται χωριστά, θεωρώντας τον άλλο μηδέν.

Ο γενικός ορισμός του σφάλματος αφορά *άμεσα* τον πρώτο όρο ( $\Delta_{οργ}$ ), ωστόσο αφορά *έμμεσα* και τις τυχαίες τιμές, όπου το μέρος του ολικού σφάλματος, που εξαρτάται από το σφάλμα του οργάνου, προσδιορίζεται σε προσέγγιση μηδενικής διασποράς των αποτελεσμάτων μέτρησης.

### Ορισμός

Έστω ότι η πραγματική τιμή κάποιου αμετάβλητου στο χρόνο μεγέθους είναι  $A$ , ενώ ο υπολογισμός ή η μέτρησή του έδωσε την τιμή  $a$ .

Με τη λέξη **σφάλμα**, πάντα εννοούμε το σφάλμα το ακριβές, δηλαδή τη διαφορά

$$\Delta_a = a - A, \quad (1)$$

η οποία με ελάχιστες εξαιρέσεις, είναι συνήθως άγνωστη, όπως άγνωστο είναι και το πρόσημο της. Καθώς το πρόσημο της διαφοράς (1) είναι άγνωστο, προτιμάται, το ακριβές σφάλμα να σημειώνεται ως

$$\Delta_a = |a - A|, \quad (2)$$

το οποίο για προφανείς λόγους έχει μόνο θεωρητική και βοηθητική αξία.

Στις εφαρμογές όμως, (Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Πειραματική Φυσική) αντί του ακριβούς σφάλματος (2), γίνεται χρήση αλλού μεγέθους, που είναι «ελαφρώς» μεγαλύτερο. Έτσι, εισάγεται ή δηλώνεται (από τον ερευνητή ή την κατασκευάστρια εταιρεία του μετρητικού οργάνου) ένας θετικός αριθμός,  $\varepsilon_a$ , με ένα ή, το πολύ, με δύο σημαντικά ψηφία (πρόκειται για σύμβαση), όσο γίνεται μικρότερος, που ωστόσο είναι πάντα λίγο μεγαλύτερος από το σφάλμα το ακριβές, προκειμένου με σιγουριά 100 % η περιοχή  $a \pm \varepsilon_a$  να περιλαμβάνει το σφάλμα το ακριβές:

$$\Delta_a = |a - A| \leq \varepsilon_a. \quad (3)$$

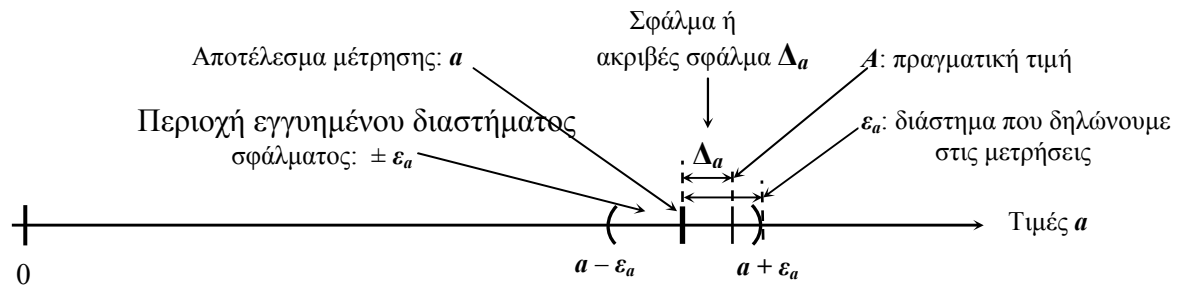
Στη σχέση (3), η ισότητα αναφέρεται σε εκείνες τις λίγες περιπτώσεις όπου η ακριβής τιμή  $A$  είναι γνωστή.

Τον τρόπο με τον οποίο εισάγεται ή ορίζεται ο θετικός αριθμός  $\varepsilon_a$  θα δούμε λίγο πιο κάτω. Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να εξετάσουμε πρώτα την εικόνα που βλέπουμε στο Σχ.5, όπου σε παραστατική μορφή παρουσιάζονται τα 4 βασικά μεγέθη και έννοιες της Θεωρίας Σφαλμάτων: η πραγματική τιμή  $A$ , η προσεγγιστική τιμή  $a$ , το ακριβές σφάλμα  $\Delta_a$  και το εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon_a$ , που δηλώνουμε τελικά στις μετρήσεις.

Στο Σχ.5, η περιοχή  $\pm \varepsilon_a$ , γύρω από το αποτέλεσμα μέτρησης  $a$  ορίζεται ως περιοχή εγγυημένου διαστήματος σφάλματος, καθώς αυτή με σιγουριά 100 % περιλαμβάνει το σφάλμα το ακριβές.

Από τον ορισμό της  $\varepsilon_a$  (ανισότητα 3), για την πραγματική τιμή  $A$  προκύπτουν οι ανισότητες

$$a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a, \quad (4)$$



Σχήμα 5. Γενικός ορισμός του σφάλματος.

η οποίες είναι βασικές στη Θεωρία Σφαλμάτων. Σύμφωνα με τις ανισότητες (4), η πραγματική τιμή  $A$  βρίσκεται «κάπου» εντός του διαστήματος  $a \pm \varepsilon_a$ , ωστόσο η ακριβής της θέση παραμένει άγνωστη.

Στην Πειραματική Φυσική το αποτέλεσμα μέτρησης συνηθίζεται να σημειώνεται ως

$$A = a \pm \varepsilon_a, \quad (5)$$

εννοώντας με τη συμβολική αυτή παράσταση (εδώ το σύμβολο της ισότητας χρησιμοποιείται καταχρηστικά) ότι η πραγματική τιμή  $A$  βρίσκεται «κάπου» εντός του διαστήματος  $a \pm \varepsilon_a$ . Ωστόσο πρέπει πάντα να θυμόμαστε ότι πίσω από την παράσταση (5) βρίσκονται οι 2 βασικές ανισότητες (4). Αυτός είναι ο σωστός ορισμός του σφάλματος. Άλλον ή δευτερο ορισμό το σφάλμα δεν έχει, καθώς το σφάλμα της μέσης τιμής αναφέρεται σε άλλες καταστάσεις και είναι σωστότερα να αποκαλείται *αβεβαιότητα* της μέσης τιμής.

Ποσοτικά, η ακρίβεια της μέτρησης ορίζεται από το σχετικό σφάλμα, δηλαδή το λόγο

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{a}. \quad (6)$$

Όσο μικρότερος είναι αυτός ο λόγος, τόσο θεωρείται μεγαλύτερη η ακρίβεια της μέτρησης. Επίσης, στο βαθμό που ο αριθμός  $\varepsilon_a$  είναι εγγυημένος, προφανώς, εγγυημένο θα είναι και το σχετικό σφάλμα  $\delta_a$ .

### 2.1. Προσδιορισμός του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος $\varepsilon_a$

Στους προσεγγιστικούς αριθμούς μαθηματικής προέλευσης, όπως και στις μαθηματικές πράξεις με τους αριθμούς αυτούς, η τιμή  $\varepsilon_a$  υπολογίζεται (προσδιορίζεται) από τον ίδιο τον ερευνητή. Θα αναφέρουμε ένα σχετικά απλό παράδειγμα.

Το  $\varepsilon_a$  ορίζεται εύκολα στο ακριβές πηλίκο  $20/3$  (οι αριθμοί 20 και 3 είναι απόλυτα ακριβείς), η δεκαδική παράσταση του οποίου με 3 σημαντικά ψηφία παράγει τον προσεγγιστικό αριθμό 6,66, για το ακριβές σφάλμα του οποίου (0,006666...) μπορούμε να πούμε ότι είναι μικρότερο από 0,007. Εδώ για τιμή της  $\varepsilon_a$  επιλέγουμε τον αριθμό 0,007, καθώς

$$|6,66 - 20/3| < 0,007$$

ενώ το αποτέλεσμα της διαίρεσης μπορούμε να το σημειώσουμε ως:

$$20/3 = 6,666 \pm 0,007$$

Στο ερώτημα αν η επιλογή  $\varepsilon_a = 0,007$  είναι η ελάχιστη δυνατή, η απάντηση είναι – όχι, διότι οι επιλογές:  $\varepsilon_a = 0,0067$ ,  $\varepsilon_a = 0,00667$ ,  $\varepsilon_a = 0,006667$  κ.ο.κ, είναι ακόμη μικρότερες. Το αδιέξοδο στην επιλογή της τιμής  $\varepsilon_a$  αίρεται με μία σύμβαση.

**Σύμβαση.** Από όλους τους υποψήφιους αριθμούς της  $\varepsilon_a$ , επιλέγονται αυτοί, που στην παράστασή τους έχουν 1 ή, το πολύ, 2 ψηφία. Έτσι τη σύμβαση αυτή ικανοποιούν οι αριθμοί 0,007 και 0,0067. Συνεπώς, το αποτέλεσμα της διαίρεσης μπορεί να σημειωθεί με 2 τρόπους:

$$20/3 = 6,666 \pm 0,007$$

και

$$20/3 = 6,6666 \pm 0,0067.$$

Η σύμβαση του ενός ή δύο σημαντικών ψηφίων είναι καίριας σημασίας, καθώς δίχως τη σύμβαση αυτή η αναζήτηση της μικρότερης τιμής της  $\varepsilon_a$  γίνεται ατέρμονη, και επομένως αδιέξοδη!

Στην πειραματική πρακτική και οι δύο επιλογές (η  $\varepsilon_a = 0,007$  και η  $\varepsilon_a = 0,0067$ ) είναι αποδεχτές. Επομένως ποια από τις δύο επιλογές θα δηλωθεί, αποφασίζει ο ερευνητής.

Συνηθίζεται, στους ενδιάμεσους υπολογισμούς η τιμή της  $\varepsilon_a$  να σημειώνεται με 2 σημαντικά ψηφία ( $\varepsilon_a = 0,0067$ ), ενώ το τελικό αποτέλεσμα προτιμάται να σημειώνεται με ένα ( $\varepsilon_a = 0,007$ ), παρά τη μικρή διόγκωσή του.

## 2.2. Εγγυημένου διαστήματος σφάλματος των μετρητικών οργάνων

Στα μετρητικά όργανα ο αριθμός  $\varepsilon_a$  δηλώνεται σε εγγυημένη μορφή από την κατασκευάστρια εταιρεία. Αυτό σε μεγάλο βαθμό διευρύνει το φάσμα των χρηστών, καθώς διευκολύνει τη χρήση του οργάνου και από ερευνητές που δεν είναι μνημένοι στις λεπτές πτυχές της Ηλεκτρονικής και της Οργανολογίας. Έτσι, δηλώνεται προς τους χρήστες του οργάνου, ότι με το συγκεκριμένο όργανο το σφάλμα μέτρησης δεν υπερβαίνει την τάδε τιμή, όταν αυτό χρησιμοποιείται υπό κανονικές συνθήκες που ορίζει η εταιρεία.

Σε αντίθεση με τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, όπου η εγγύηση είναι διασφαλισμένη και απόλυτη, στα μετρητικά όργανα η σιγουριά του 100 % ισχύει μόνο για τη χρονική περίοδο (συνήθως 2 έτη) που ισχύει η εγγύηση της κατασκευάστριας εταιρείας. Μετά το πέρας αυτής της περιόδου ο μετρητής πρέπει να διακριβωθεί εκ' νέου, καθώς λόγω γήρανσης των ηλεκτρονικών του εξαρτημάτων οι παράμετροι ακρίβειας σιγά σιγά ολισθαίνουν με το χρόνο.

Εδώ πρέπει να προσθέσουμε και την εξής λεπτομέρεια. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της ολίσθησης και να διασφαλιστούν εγγυημένες μετρολογικές σταθερές ακρίβειας στο διάστημα των 2 ετών, στην αρχή της περιόδου εγγύησης οι εταιρείες προβαίνουν σε εφεδρική μείωση του πραγματικού διαστήματος σφάλματος από 1,5 έως 2,5 φορές, ανάλογα με την εταιρεία, δίχως η εφεδρεία αυτή να δηλώνεται στους χρήστες. Στους χρήστες δηλώνεται το εγγυημένο διάστημα σφάλματος που διαμορφώνεται στο τέλος της διετίας, ενώ το ρίσκο και κόστος της όποιας απόκλισης από την εγγύηση αναλαμβάνει η κατασκευάστρια εταιρεία.

## 2.3. Σωστή χρήση του όρου «σφάλμα»

Ο ορισμός του σφάλματος που βλέπουμε στο Σχ. 5 βρίσκεται στη βάση της Θεωρίας σφαλμάτων, με ιδιαίτερη βαρύτητα στο σφάλμα του οργάνου και τα σφάλματα μαθηματικής προέλευσης. Από τη σκοπιά αυτή, είναι λάθος η λέξη σφάλμα να συνοδεύεται με τη λέξη είναι, καθότι το σφάλμα, δηλαδή το σφάλμα το ακριβές, είναι πάντα άγνωστο! Ωστόσο, όταν γίνεται χρήση του όρου «σφάλμα», ο όρος αυτός πρέπει να συνοδεύεται με φράσεις όπως «δεν υπερβαίνει» ή είναι «μικρότερο από» κ.λπ. Για παράδειγμα, λέμε, ότι η τάση 200 V μετρήθηκε με σφάλμα που δεν υπερβαίνει τα 2 βολτ ή, εναλλακτικά, με σφάλμα μικρότερο από 2 βολτ κ.ο.κ. Από τη σκοπιά αυτή, η ποσότητα

$$\pm \varepsilon_a$$

δεν πρέπει να αποκαλείται σφάλμα (!), καθώς είναι μόνο ένας οριακός εγγυημένος αριθμός, τον οποίο ο ερευνητής με κάθε τρόπο προσπαθεί να τον μειώσει, ωστόσο προσέχοντας να τηρούνται οι δύο βασικές ανισότητες της σχέσης (4):

$$a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a.$$

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να εξετάσουμε τα σφάλματα των οργάνων, όπως και τον τρόπο ανάγνωσης της ένδειξής τους.

Σημειώνουμε, ότι τα μετρητικά όργανα χωρίζονται σε δύο μεγάλες ομάδες: τα όργανα τα αναλογικά και τα όργανα τα ψηφιακά. Θα δούμε πρώτα τα όργανα τα αναλογικά.

### 3. Άμεσες μετρήσεις

Σφάλματα αναλογικών και ψηφιακών οργάνων

**Όργανα αναλογικά.** Ας δούμε με ποιον τρόπο η κατασκευάστρια εταιρεία δηλώνει το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του αναλογικού οργάνου. Τα όργανα αυτά έχουν μικρό κόστος, μεγάλη αξιοπιστία και χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην έρευνα και στις εφαρμογές.

Καταρχάς, δύο είναι οι βασικές παράμετροι ακριβείας του αναλογικού οργάνου: το κύριο σφάλμα και το σφάλμα ανάγνωσης. Τα σφάλματα αυτά έχουν διαφορετική φύση, είναι ανεξάρτητα και ορίζονται με διαφορετικούς τρόπους. Θα εξετάσουμε πρώτα το σφάλμα ανάγνωσης.

#### 3.1. Σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού οργάνου

Πρέπει να θυμόμαστε, ότι στα αναλογικά όργανα η ένδειξη του μετρητή *στρογγυλοποιείται* (σημειώνουμε την κοντινότερη χαρακιά της κλίμακάς του), όταν ο δείκτης (βελόνα) δε βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς» (Σχ. 6α).

Η στρογγυλοποίηση της ένδειξης δημιουργεί το λεγόμενο *σφάλμα ανάγνωσης*, άνω όριο του οποίου είναι η  $\psi/2$ , όπου  $\psi$  είναι η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας του οργάνου. Για παράδειγμα, στους πλαστικούς χάρακες η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης είναι 1 mm ( $\psi = 1$  mm), στους μεταλλικούς χάρακες 0,5 mm, στα παχύμετρα 0,1 mm, στα μικρόμετρα 0,01 mm κ.ο.κ.

Επομένως, στα αναλογικά όργανα το *συνεχές μετρούμενο μέγεθος ψηφιοποιείται*, με βήμα  $\psi/2$ , καθώς μόνο αυτό το διάστημα στην κλίμακα διακρίνεται με σιγουριά και μπορούμε να το εγγυηθούμε. Κλάσματα της  $\psi/2$  δεν τα σημειώνουμε στην τιμή! Αυτό επιβάλλει η *τιμή της ένδειξης* που σημειώνουμε να περιλαμβάνει *μόνο ακέραιο αριθμό των  $\psi/2$* .

Προφανώς, η τιμή της  $\psi/2$  έχει ιδιότητες της  $\epsilon_a$  και είναι ένας εγγυημένος αριθμός. Σημειώνουμε ακόμη, ότι το σφάλμα ανάγνωσης θεωρείται «μηδέν» όταν ο δείκτης (βελόνα) βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς» (αστοχία μικρότερη από το μισό πάχος της χαρακιάς, Σχ.6β) ή βρίσκεται στο μέσον των δύο χαρακιών (Σχ. 6γ), γεγονός που μας εμποδίζει να επιλέξουμε την κοντινότερη χαρακιά.

Καθώς όμως το πάχος της χαρακιάς είναι συνήθως  $\psi/5$ , όταν ο δείκτης βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς», σε μία πιο ρεαλιστική προσέγγιση το σφάλμα ανάγνωσης μπορεί να δηλωθεί μικρότερο από 0,5 πάχος της χαρακιάς, δηλαδή να δηλωθεί ως:  $\epsilon_{av} \leq \psi/10$ .

#### 3.2. Κύριο σφάλμα του αναλογικού οργάνου

Η προτροπή που αναφέραμε λίγο πιο πάνω, δηλαδή στην τιμή της ένδειξης να μη συμπεριλαμβάνονται τα κλάσματα της  $\psi/2$  πηγάζει από το γεγονός ότι ακόμη και όταν το σφάλμα ανάγνωσης είναι μηδέν (ο δείκτης βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς»), πάρα ταύτα, το όργανο σφάλει (!), δηλαδή η ένδειξή του διαφέρει από την πραγματική τιμή. Η διαφορά αυτή, σε εγγυημένη μορφή δηλώνεται από την κατασκευάστρια εταιρεία ως *κύριο σφάλμα του οργάνου*, όταν αυτό χρησιμοποιείται υπό *κανονικές συνθήκες*, δηλαδή σε ένα καθορισμένο από την εταιρεία εύρος θερμοκρασιών, υγρασιών, ατμοσφαιρικών πιέσεων, απόκλισης από την κάθετο, το οριζόντιο, προσανατολισμού, διάσπαρτων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων κ.λπ. Όταν κάποιο μέγεθος ξεφεύγει από τα καθορισμένα όρια, για παράδειγμα, η θερμοκρασία, στο κύριο σφάλμα προστίθεται ένας όρος ακόμη, με τον αντίστοιχο συντελεστή.

Το κόστος κατασκευής του μετρητικού οργάνου εξαρτάται άμεσα από την ακρίβειά του, και είναι ελάχιστο όταν το κύριο σφάλμα είναι περίπου  $\psi/2$  (συνήθως, είναι λίγο μικρότερο).

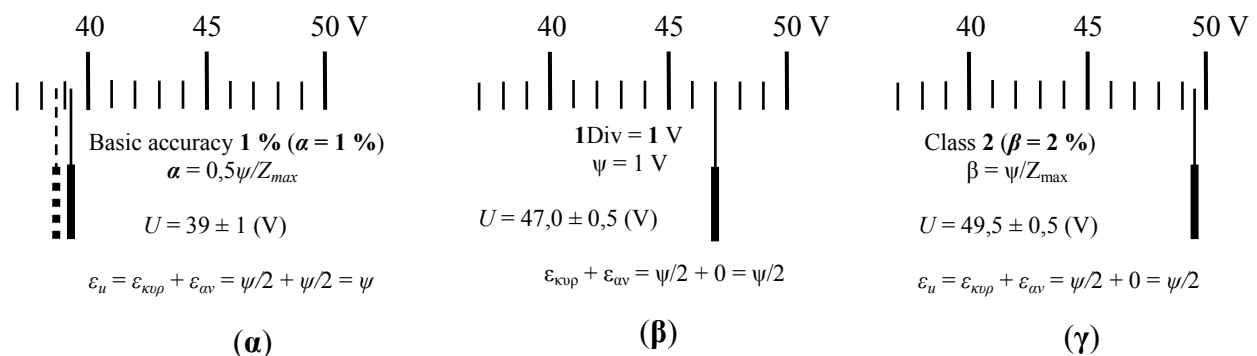
Για παράδειγμα, στο μικρόμετρο, η τιμή της  $\psi/2$  είναι 5  $\mu\text{m}$ , ενώ το κύριο σφάλμα δεν υπερβαίνει τα 4  $\mu\text{m}$  (Πίνακας 2, σελ. 155).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το αναλογικό όργανο έχει 2 συνιστώσες σφάλματος: το σφάλμα ανάγνωσης και το κύριο σφάλμα του οργάνου. Από τον ορισμό των σφαλμάτων αυτών προκύπτει ότι η ακριβής τιμή τους είναι πάντα μικρότερη της  $\psi/2$ , δηλαδή η τιμή της  $\psi/2$  αποτελεί το άνω όριο των δύο αυτών σφαλμάτων. Έτσι, όταν δηλώνεται η τιμή  $\psi/2$ , τα δύο σφάλματα είναι σίγουρα μικρότερα.

Γενικότερα, στα αναλογικά όργανα ο αριθμός των λεπτών χαρακιών, όπως και η απόσταση μεταξύ των αξόνων τους δε χαράζονται τυχαία, αλλά εξαρτώνται από το συνολικό εγγυημένο σφάλμα του οργάνου (κύριο + ανάγνωσης). Στα περισσότερα μετρητικά αναλογικά όργανα τηρείται ο όρος  $\psi \geq \varepsilon_{\text{οργ}}$  ( $\psi \geq 2\varepsilon_{\text{κυρ}}$ ), αλλά στα ενδεικτικά όργανα, όπου τα ζητήματα ακρίβειας είναι δευτερευούσης σημασίας, τηρείται ο όρος  $\psi \geq 2\varepsilon_{\text{οργ}}$  ( $\psi \geq 4\varepsilon_{\text{κυρ}}$ ). Εδώ οι χαραγές χαράζονται 2 φορές αραιότερα.

Το συνολικό εγγυημένο σφάλμα του οργάνου η κατασκευάστρια εταιρεία είναι υποχρεωμένη να το δηλώνει, ωστόσο το δηλώνει συνήθως σε κωδικοποιημένη μορφή. Για παράδειγμα, στην πρόσοψη του οργάνου ή με κάποιον άλλον τρόπο δηλώνεται ή αναγράφεται:

(Α) – το κύριο σφάλμα του οργάνου  $\alpha$  (%), (main ή basic accuracy  $\alpha$  (%), Σχ. 6α), το οποίο ορίζεται μέσω της  $\psi/2$ , επί τις εκατό της  $Z_{\text{max}}$ , όπου  $Z_{\text{max}}$  είναι η μέγιστη τιμή της κλίμακας του [ $\alpha = (0,5\psi/Z_{\text{max}}) \times 100$  %]. Συνήθως, το γινόμενο  $\alpha Z_{\text{max}}$  είναι λίγο μικρότερο του άνω ορίου του σφάλματος ανάγνωσης και δεν υπερβαίνει τα  $\psi/2$  ( $\alpha Z_{\text{max}} \leq \psi/2$ ).



**Σχήμα 6.** Ένδειξη σφάλματος του αναλ. οργάνου και ανάγνωση της ένδειξης με στρογγυλοποίηση.

Στα όργανα όπου δηλώνεται το κύριο σφάλμα του μετρητή, σε μία τυχαία θέση του δείκτη το σφάλμα μέτρησης δεν υπερβαίνει την τιμή της  $\psi$ :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\text{κυρ}} + \varepsilon_{\text{αναγ}} = \alpha Z_{\text{max}} + \psi/2 = \psi/2 + \psi/2 = \psi. \quad (7)$$

(B) – η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης  $\psi$  (Σχ. 6β), η οποία μας πληροφορεί ότι το κύριο σφάλμα του μετρητή δεν υπερβαίνει τα  $\psi/2$ . Επομένως σε μία τυχαία θέση του δείκτη, το σφάλμα μέτρησης δεν υπερβαίνει ή είναι μικρότερο από το άθροισμα:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{\text{κυρ}} + \varepsilon_{\text{αναγ}} \leq \psi/2 + \psi/2 = \psi. \quad (8)$$

(Γ) – η κατηγορία του μετρητή,  $\beta$ , (accuracy class  $\beta$ , Σχ. 6γ), ορίζεται μέσω της  $\psi$ , επί τις εκατό της  $Z_{\text{max}}$  [ $\beta = (\psi/Z_{\text{max}}) \times 100$ %].

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι σε μία τυχαία θέση του δείκτη, το σφάλμα οργάνου δεν υπερβαίνει την τιμή της  $\psi$ :

$$\varepsilon_a = \beta Z_{\text{max}} = \psi = \varepsilon_{\text{αναγ}} + \varepsilon_{\text{κυρ}} = \psi/2 + \psi/2, \quad (9)$$

ενώ όταν η βελόνα (δείκτης) του μετρητή βρίσκεται πάνω στη χαρακιά «ακριβώς» ή στη μέση των δύο χαρακιών, που δυσκολεύει την επιλογή της κοντινότερης (Σχ. 6β,γ), στο εγγυημένο

διάστημα σφάλματος συμβάλει *μόνο* το κύριο σφάλμα του οργάνου, που η ακριβής του τιμή είναι συνήθως λίγο μικρότερο της  $\psi/2$ . Παρά ταύτα, με μικρή εφεδρεία, για κύριο σφάλμα του οργάνου δηλώνεται η τιμή της  $\psi/2$ , καθώς η τιμή αυτή έχει ιδιότητες του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος. Εδώ οι μετρήσεις γίνονται με ακρίβεια 2 φορές καλύτερη.

Στα σχήματα (6β) και (6γ), αυτό φαίνεται και από το πρόσθετο ψηφίο στην τιμή που σημειώνεται, το οποίο επιβάλλεται από τους γενικότερους κανόνες παράστασης της τιμής και του σφάλματος στους προσεγγιστικούς αριθμούς.

Τονίζουμε ότι στα αναλογικά όργανα, οι λόγοι  $0,5\psi/Z_{max}$  και  $\psi/Z_{max}$  ορίζονται *μόνο* στην περιοχή της  $Z_{max}$ , ενώ οι τιμές  $\alpha Z_{max} (\psi/2)$  και  $\beta Z_{max} (\psi)$  *επεκτείνονται σε όλη την κλίμακα* του οργάνου, προκαλώντας *απώλεια ακρίβειας* (μεγάλο σχετικό σφάλμα) στις μικρές τιμές της κλίμακας. Συνεπώς, η ακρίβεια του αναλογικού οργάνου αξιοποιείται επαρκώς μόνο όταν ο δείκτης (η βελόνα) βρίσκεται στο τελευταίο τέταρτο της κλίμακάς του! Η αδυναμία αυτή αντιμετωπίζεται στα όργανα που έχουν πολλές κλίμακες, επιλέγοντας την κατάλληλη.

**Σημείωση 1.** Σε μερικά ενδεικτικά όργανα, στα οποία η ακρίβεια είναι δευτερευούσης σημασίας, δεν τηρείται ο όρος  $\beta Z_{max} = \psi$  ( $\epsilon_{opp} \neq \psi$ ). Στα όργανα αυτά το σφάλμα οργάνου προσδιορίζεται από το γινόμενο  $\beta Z_{max}$ , παραβλέποντας την τιμή της  $\psi$ .

**Σημείωση 2.** Λόγω τεχνολογικής προόδου, ο όρος

$$\epsilon_{κυρ} \approx \epsilon_{αναγ} \approx \psi/2$$

δεν τηρείται πάντα! Για παράδειγμα, στο μεταλλικό κανόνα, δίχως μεγάλη επιβάρυνση στο κόστος, το κύριο σφάλμα δεν υπερβαίνει τα 0,05 mm ( $\epsilon_{κυρ} = 0,05$  mm), ενώ η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης είναι 1 mm ( $\psi = 1$  mm). Στο όργανο αυτό, η επιλογή της ελάχιστης υποδιαίρεσης έγινε με άλλα κριτήρια, καθώς η χρήση του με χαραγές κάθε 0,05 mm θα ήταν άβολη!

#### 4. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος ψηφιακών οργάνων

Τα ψηφιακά όργανα έχουν ψηφιακή οθόνη και, επομένως, στα όργανα αυτά το σφάλμα ανάγνωσης είναι μηδέν!

Τα όργανα αυτά είναι ηλεκτρονικά, όπου η ολίσθηση του μηδενός ελέγχεται (εξουδετερώνεται) αυτόματα, ηλεκτρονικά, 3 φορές το δευτερόλεπτο, πριν από κάθε κύκλο μέτρησης, που διαρκεί συνήθως 0,33 s.

Στα ψηφιακά όργανα 3,5 ψηφίων η ακρίβειά είναι της τάξης 1 %, ενώ στα όργανα 4,5 ψηφίων, περίπου 0,1 %.

Το κύριο σφάλμα ή το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού οργάνου δηλώνεται στο συνοδευτικό βιβλιαράκι. Συνήθως, η δήλωση αυτή έχει τη μορφή:

$$\text{Accuracy: } \gamma (\%) + hr, \quad (10)$$

όπου  $r$  είναι η διακριτική ικανότητα (resolution) ή η μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης της παριστάμενης στην οθόνη τιμής, ενώ το γινόμενο  $hr$  παριστάνει το άνω όριο του υπολοίπου της αυτόματης ρύθμισης του μηδενός, στην επιλεγμένη κλίμακα του οργάνου. Επομένως το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του ψηφιακού μετρητή υπολογίζεται από τη σχέση

$$\epsilon_a = a\gamma + hr,$$

όπου  $a$  είναι η ένδειξή του.

##### 4.1. Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος άμεσης μέτρησης με ψηφιακό βολτόμετρο

Έστω ότι στο συνοδευτικό βιβλιαράκι του οργάνου σημειώνεται, ότι στην κλίμακα 20 V, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος είναι

$$1 \% + 3r.$$

Έστω ακόμη ότι η ένδειξη του οργάνου είναι 19,36 V.

Τότε στην ένδειξη 19,36 V, η τιμή του  $r$  (resolution) είναι 0,01 V.

Κατά δήλωση της κατασκευάστριας εταιρείας, στην κλίμακα αυτή η ολίσθηση του μηδενός δεν υπερβαίνει τα 0,03 V.

Από τα δεδομένα αυτά, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος είναι:

$$\varepsilon_U = 19,36 \times 0,01 + 3 \times 0,01 \approx 0,19 + 0,03 = 0,22 \text{ (V)}.$$

**Σημείωση.** Στο παράδειγμα αυτό το σφάλμα υποεκτιμάται 22 φορές (2200 % !!!), όταν για σφάλμα μέτρησης της τιμής 19,36 V δηλώνεται ή σημειώνεται (ως συνήθως) το 0,01 V.

Τονίζουμε, ότι στα ψηφιακά όργανα η διακριτική ικανότητα δεν πρέπει να ταυτίζεται με το σφάλμα του οργάνου, που είναι συνήθως μία τάξη μεγαλύτερο!

#### 4.2. Παράδειγμα μέτρησης μεταβολής του σήματος

Όταν με τον ψηφιακό μετρητή μετράμε τη μεταβολή του σήματος, κατά  $\Delta a$ , όπου

$$\Delta a = a_2 - a_1,$$

(η δεύτερη μέτρηση γίνεται αμέσως μετά την πρώτη), τότε το «σφάλμα» στην τιμή της μεταβολής, για παράδειγμα, της τάσης, είναι απαλλαγμένο από τον όρο  $hr$  και είναι

$$\varepsilon_{\Delta a} = \gamma \Delta a.$$

Ο όρος  $hr$  απαλείφεται από τους υπολογισμούς λόγω του ότι στις δύο τιμές,  $a_1$  και  $a_2$ , έχει ίδιο πρόσημο και τιμή. Η παρατήρηση αυτή αφορά και τον ποσοστιαίο όρο  $\gamma$ , παρά το ότι έχει άγνωστη τιμή και πρόσημο. Το γεγονός αυτό επιβάλλει να αφαιρούνται και τα σφάλματα των δύο τιμών (αλγεβρική αφαίρεση των σφαλμάτων και όχι αριθμητική).

Συνεπώς, για να υπολογιστεί το σφάλμα της διαφοράς των τιμών  $a_1$  και  $a_2$ , μαζί με τις τιμές, πρέπει να αφαιρεθούν και τα σφάλματά τους:

$$\Delta a = a_2 - a_1,$$

$$\varepsilon_{\Delta a} = (a_2\gamma + hr) - (a_1\gamma + hr) = \gamma(a_2 - a_1) = \gamma\Delta a.$$

Γενικότερα όμως, σε προβλήματα όπου τα σφάλματα των δύο προσεγγιστικών αριθμών έχουν άγνωστη τιμή και πρόσημο, ακόμη και στην αφαίρεσή τους, προκειμένου το διάστημα σφάλματος να είναι εγγυημένο, τα σφάλματά τους πρέπει να τα προσθέσουμε αριθμητικά.

**Σύμβαση.** Σε πολύ μικρές μεταβολές του μετρούμενου μεγέθους, δηλαδή όπου το γινόμενο  $\gamma\Delta a$  είναι μικρότερο της διακριτικής ικανότητας του οργάνου:

$$\gamma\Delta a < r,$$

το γινόμενο  $\gamma\Delta a$  αγνοείται και για εγγυημένο διάστημα σφάλματος της μεταβολής  $\Delta a$  σημειώνεται η διακριτική ικανότητα του οργάνου,  $r$ :

$$\varepsilon_{\Delta a} = r.$$

Παράδειγμα 1

Η μεταβολή της τάσης από 19,36 προς 17,36 σημειώνεται ως

$$\Delta u = -2,00 \pm 0,02 \text{ (V)},$$

καθώς εδώ το γινόμενο  $\gamma\Delta u$  είναι 0,02 [ $\gamma\Delta u = 0,02 > r$ , ( $r = 0,01$  V)].

Παράδειγμα 2

Η μικρή μεταβολή της τάσης, από 19,36 V προς 19,98 V, σημειώνεται ως

$$\Delta u = 0,62 \pm 0,01 \text{ (V)} \quad [\gamma \Delta u = 0,0062 < r],$$

καθώς στην περίπτωση αυτή το γινόμενο  $\gamma \Delta u$  είναι μικρότερο από τη διακριτική ικανότητα του οργάνου [ $\gamma \Delta u = 0,0062 \text{ V} < 0,01 \text{ V}$ , ( $r = 0,01 \text{ V}$ )].

Είναι άξιο προσοχής το γεγονός ότι το σφάλμα στη διαφορά των δύο τιμών τάσης δεν υπερβαίνει το 0,01 V, παρότι οι τιμές 19,36 V και 19,98 V είναι επιβαρυνμένες με σφάλματα της τάξης 0,22 V (!).

## 5. Έμμεσες μετρήσεις

### *Διάδοση του εγγυημένο διάστημα σφάλματος σε έμμεσες μετρήσεις*

Το μέρος αυτό αφορά τη μαθηματική επεξεργασία των σφαλμάτων μαθηματικής προέλευσης, αλλά και τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των οργάνων, όταν η διασπορά των αποτελεσμάτων μέτρησης είναι αμελητέα. Ωστόσο, ακόμη και όταν η διασπορά τους δεν είναι αμελητέα, ο όρος  $\Delta_{opp}$ , του αθροίσματος  $\Delta_{ολ} = \Delta_{opp} + \Delta_{τυχ}$  υπολογίζεται σε προσέγγιση μηδενικής διασποράς των αποτελεσμάτων μέτρησης.

Θυμίζουμε, ότι η μέτρηση είναι έμμεση όταν η τιμή της εξάγεται από μία μαθηματική σχέση μεγεθών, που μετρήθηκαν άμεσα. Σε μετρήσεις αυτού του είδους τα σφάλματα των οργάνων, που είναι εγγυημένα, όπως και τα σφάλματα μαθηματικής προέλευσης τα επεξεργαζόμαστε ακολουθώντας άλλον μαθηματικό φορμαλισμό, δίχως τα τετράγωνα και ρίζες που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, δηλαδή εδώ ακολουθούμε τον γενικό ορισμό του σφάλματος.

Οι σχέσεις με τα τετράγωνα και ρίζες είναι σωστές, ωστόσο αναφέρονται για καταστάσεις όπου παρατηρείται έντονη διασπορά των αποτελεσμάτων μέτρησης και αφορούν το τυχαίο σφάλμα της μέσης τιμής που καλύπτεται με μία ορισμένη πιθανότητα (συνήθως 68,3 %), ενώ το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του οργάνου καλύπτεται με πιθανότητα 100 % και θέλει άλλον χειρισμό, προκειμένου να διασφαλιστεί η εγγύηση και της έμμεσης μέτρησης.

Όταν στις πειραματικές τιμές δεν αναμένεται διασπορά, τότε η μέτρηση γίνεται μόνο μία φορά, όπου στην επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων προβάλλει το σφάλμα του οργάνου, που είναι εγγυημένο. Στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα της μαθηματικής επεξεργασίας πρέπει να είναι εξίσου αξιόπιστο και εγγυημένο (εγγύηση 100 %), όπως και οι τιμές που ελήφθησαν σε άμεσες μετρήσεις.

Τονίζουμε, ότι η εγγύηση της έμμεσης μέτρησης πρέπει να είναι διασφαλισμένη! Στην αντίθετη περίπτωση η μέτρηση είναι αναξιόπιστη, καθώς δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους βρίσκεται εντός του δηλωμένου διαστήματος σφάλματος.

### *5.1. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις 4 αριθμητικές πράξεις*

Θα εξετάσουμε πρώτα την έμμεση μέτρηση στις 4 αριθμητικές πράξεις με προσεγγιστικούς αριθμούς.

Έστω ότι στις δύο προσεγγιστικές τιμές **a** και **b**, που μετρήθηκαν άμεσα, τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων είναι  $\epsilon_a$  και  $\epsilon_b$ , αντίστοιχα. Θα αναφέρουμε (η απόδειξη γίνεται στο Παράρτημα) το εγγυημένο διάστημα σφάλματος της αριθμητικής πράξεις, όταν στους δύο προσεγγιστικούς αριθμούς, οι ακριβείς τιμές των σφαλμάτων,  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$ , έχουν άγνωστη τιμή και πρόσημο. Θα εξετάσουμε πρώτα την πρόσθεση.

### *5.2. Πρόσθεση προσεγγιστικών αριθμών*

Έστω άθροισμα  $u = a + b$ . Όταν στους προσεγγιστικούς αριθμούς **a** και **b** τα σφάλματα είναι τυχαία, δηλαδή είναι  $\sigma_{a\mu}$  και  $\sigma_{b\mu}$ , αντίστοιχα, τότε το σφάλμα του αθροίσματος υπολογίζεται

ακολουθώντας το γεωμετρικό κανόνα πρόσθεσης (βλ. Πίνακα 3, σελ. 156). Όταν όμως τα δύο σφάλματα είναι εγγυημένα διαστήματα  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$ , με άγνωστες τιμές και πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων,  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$ , τότε προκειμένου στο άθροισμα το διάστημα σφάλματος να είναι εγγυημένο, για τον υπολογισμό του σφάλματος  $\varepsilon_u$  γίνεται χρήση του αριθμητικού κανόνα πρόσθεσης (βλ. Παράρτημα 8.1, σελ. 115):

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b \quad (11)$$

Για μεγάλο αριθμό προσθετέων  $a_i$  ( $u = \sum a_i$ , βλ. Παράρτημα 8.1, σελ. 115) η σχέση (11) γενικεύεται στη σχέση:

$$\varepsilon_u = \sum \varepsilon_i \quad (11\alpha)$$

ή

$$\varepsilon_u = n\varepsilon, \quad (11\beta)$$

όταν όλοι οι προσεγγιστικοί αριθμοί  $a_i$  έχουν ίδιο εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon$ .

Παράδειγμα πρόσθεσης προσεγγιστικών αριθμών. Μετρήσεις με μικρόμετρο ( $\psi = 0,01$  mm). Έστω δύο προσεγγιστικοί αριθμοί,  $a$  και  $b$ , όπου:

$$a = 1,64 \pm 0,01 \text{ (mm)} \quad \text{και} \quad b = 2,36 \pm 0,01 \text{ (mm)}.$$

Έστω ακόμη ότι στους δύο προσεγγιστικούς αριθμούς τα διαστήματα σφαλμάτων είναι εγγυημένα.

*Λύση.* Το άθροισμα των δύο αριθμών υπολογίζεται κανονικά:

$$u = a + b = 1,64 \text{ mm} + 2,36 \text{ mm} = 4, \dots \text{ mm},$$

ενώ το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του αθροίσματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0,01 \text{ mm} + 0,01 \text{ mm} = 0,02 \text{ mm}.$$

Η σωστή παράσταση του αθροίσματος είναι:

$$u = 4,00 \pm 0,02 \text{ (mm)},$$

παρότι στο κομπιουτεράκι, το άθροισμα εμφανίζεται ως 4.

**Σημείωση.** Η σχέσεις (11α) ή η (11β) πρέπει να χρησιμοποιούνται όταν ο αριθμός των προσθετέων είναι μικρότερος του 6. Όταν ο αριθμός τους είναι μεγάλος, για παράδειγμα 100 ή 300, η χρήση της σχέσης (11α) οδηγεί σε μεγάλη υπερεκτίμηση του διαστήματος σφάλματος, καθώς προϋποθέτει ότι στους 100 ή 300 προσθετέους οι ακριβείς τιμές των σφαλμάτων έχουν ίδιο πρόσημο και μέγιστη τιμή. Σε μικρό αριθμό προσθετέων η κατάσταση αυτή είναι πιθανή, ωστόσο όταν ο αριθμός τους είναι μεγάλος, πιο πιθανό είναι περίπου τα μισά σφάλματα να έχουν αντίθετο πρόσημο και να αναιρούνται μερικώς. Στις περιπτώσεις αυτές είναι προτιμότερη η στατιστική εκτίμηση του διαστήματος σφάλματος.

Για την απλή περίπτωση όπου όλοι οι προσθετέοι έχουν ίδιο εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon$ , η σχετική ανάλυση (βλ. Παράρτημα Π12, σελ. 121) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι με πιθανότητα  $P = 99,73 \%$ , το σφάλμα των  $n$  προσθετέων δεν υπερβαίνει την τιμή

$$\varepsilon_u = \varepsilon\sqrt{3n}.$$

Αν, για παράδειγμα, οι προσθετέοι είναι 300 ( $n = 300$ ) και τα σφάλματα όλων είναι 0,01 ( $\varepsilon = 0,01$ ), η αριθμητική πρόσθεση των  $\varepsilon_i$  οδηγεί στην τιμή

$$\varepsilon_u = n\varepsilon = 300 \times 0,01 = 3,$$

ενώ από την στατιστική εκτίμηση προκύπτει η τιμή

$$\varepsilon_u = \varepsilon\sqrt{3n} = 0,01 \times \sqrt{3 \times 300} = 0,3.$$

Βλέπουμε ότι η στατιστική εκτίμηση του σφάλματος, που είναι πιο κοντά στην πραγματική, είναι 10 φορές μικρότερη από αυτή που δίνει η αριθμητική πρόσθεση των σφαλμάτων.

### 5.3. Αφαίρεση προσεγγιστικών αριθμών

Έστω ότι  $u = a - b$ . Και στην αφαίρεση, για το εγγυημένο διάστημα σφάλματος ισχύει ο ίδιος κανόνας με αυτόν της πρόσθεσης (βλ. Παράρτημα 8, σελ. 115):

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b. \quad (12)$$

Παράδειγμα αφαίρεσης προσεγγιστικών αριθμών.

Έστω ότι αφαιρούμε δύο προσεγγιστικούς αριθμούς, τους  $a$  και  $b$ , όπου:

$$a = 1,640 \pm 0,005 \text{ (mm)} \quad \text{και} \quad b = 2,360 \pm 0,005 \text{ (mm)}$$

(μέτρηση με μικρόμετρο, με  $\varepsilon_{\text{κυρ}} = 0,005 \text{ mm}$  και  $\varepsilon_{\text{αν}} = \langle 0 \rangle$ , δηλαδή ο δείκτης βρίσκεται πάνω στη χαρακιά ακριβώς).

*Λύση.* Η διαφορά των δύο αριθμών υπολογίζεται κανονικά:

$$u = a - b = 1,640 - 2,360 = -0,720 \dots \text{ (mm)},$$

ενώ το εγγυημένο διάστημα σφάλματος αυτής της διαφοράς υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0,005 \text{ mm} + 0,005 \text{ mm} = 0,01 \text{ mm}.$$

Η σωστή παράσταση του αποτελέσματος είναι:

$$u = -0,72 \pm 0,01 \text{ (mm)}, \quad \delta \approx 1,4 \ %.$$

Προσοχή! Η αφαίρεση, ως μαθηματική πράξη οδηγεί σε μεγάλη μείωση της ακρίβειας της έμμεσης μέτρησης όταν οι δύο αριθμοί έχουν σχεδόν ίδια τιμή.

Όταν στο προηγούμενο παράδειγμα ο δεύτερος αριθμός είναι 1,62, τότε η διαφορά των 2 αριθμών είναι

$$1,64 - 1,62 = 0,02,$$

ενώ το σφάλμα της διαφοράς παραμένει 0,01, που τώρα είναι 50 % της διαφοράς (!!!).

Σε προβλήματα όπως αυτό, προκειμένου η αφαίρεση 2 περίπου ίδιων προσεγγιστικών αριθμών να μην οδηγεί σε μεγάλη απώλεια της ακρίβειας, πριν τον υπολογισμό, η αρχική αλγεβρική σχέση πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα.

Για παράδειγμα, έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί η τιμή και το σφάλμα της διαφοράς:

$$u = \frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s},$$

όπου

$$x = 100 \quad \text{και} \quad s = 1.$$

Στο πρόβλημα αυτό η τιμή της  $s$  έχει μηδενικό σφάλμα, ενώ το σφάλμα στο  $x$  δεν υπερβαίνει το 1 % ( $x = 100 \pm 1$ ).

Στον άμεσο υπολογισμό, η τιμή της διαφοράς είναι

$$u = \frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s} = \frac{1}{100-1} - \frac{1}{100+1} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101} = 0,0002,$$

ενώ για να υπολογίσουμε το σφάλμα της διαφοράς, θα λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι τα δύο κλάσματα είναι εσφαλμένα, επίσης κατά 1 %, δηλαδή διατηρούν το σχετικό σφάλμα του αριθμού  $x$ . Καθώς  $x \gg s$ , η παραπάνω παρατήρηση οδηγεί σε σφάλματα τύπου:

$$\varepsilon_1 = 0,01 \times \frac{1}{x-s} \approx \frac{0,01}{x} = 0,0001$$

και

$$\varepsilon_2 = 0,01 \times \frac{1}{x+s} \approx \frac{0,01}{x} = 0,0001,$$

από τα οποία προκύπτει ότι το σφάλμα της διαφοράς είναι

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,0001 + 0,0001 = 0,0002.$$

Στον άμεσο υπολογισμό, το αποτέλεσμα σημειώνεται ως

$$u = 0,0002 \pm 0,0002,$$

όπου το σφάλμα είναι όσο και η τιμή (!!!):

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{0,0002}{0,0002} = 1 \quad \text{ή} \quad 100 \%.$$

Από το αποτέλεσμα αυτό βλέπουμε ότι ο άμεσος υπολογισμός της διαφοράς οδηγεί σε *μεγάλη απώλεια* της ακρίβειας (100 φορές !!!) των αρχικών αριθμών, που είναι 1 %.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αυτό που κάνει τα δύο κλάσματα σχεδόν ίσα είναι ο μεγάλος κοινός όρος  $x$  ( $x = 100$ ), τον οποίο, με κατάλληλους μετασχηματισμούς της αρχικής σχέσης είναι σκόπιμο να απαλείψουμε.

Μία δοκιμασμένη μέθοδο είναι η ανάλυση των 2 κλασμάτων σε σειρές Teilor:

$$\frac{1}{x-s} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{x}\right)} = \frac{1}{x} \times \left(1 + \frac{s}{x} + 2\left(\frac{s}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{s}{x}\right)^3 + 4\left(\frac{s}{x}\right)^4 + \dots\right) \approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{s}{x}\right)$$

και

$$\frac{1}{x+s} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{x}\right)} = \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{s}{x} + 2\left(\frac{s}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{s}{x}\right)^3 + 4\left(\frac{s}{x}\right)^4 - \dots\right) \approx \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right),$$

στις οποίες θα αγνοηθούν οι λόγοι  $s/x$  που βρίσκονται σε δύναμη μεγαλύτερη από την πρώτη, καθώς στην πρώτη δύναμη ο λόγος  $s/x$  είναι της τάξης 0,01.

Αντικαθιστώντας, η διαφορά  $u$  μπορεί να σημειωθεί ως

$$u = \frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{s}{x}\right) - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right) = \frac{1}{x} \times \left(1 + \frac{s}{x} - 1 + \frac{s}{x}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{2s}{x} = \frac{2s}{x^2},$$

στην οποία απαλείφθηκε ο κοινός μεγάλος όρος 1, όταν τον συγκρίνουμε με το πηλίκο  $s/x$ .

Για την τιμή της διαφοράς, η μετασχηματισμένη σχέση δίνει

$$u = \frac{2s}{x^2} = 2 \times \frac{1}{100^2} = 0,0002,$$

ενώ στον υπολογισμό του σφάλματος θα λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι το σχετικό σφάλμα του κλάσματος  $2s/x^2$  διατηρεί το σχετικό σφάλμα του  $x$ , αλλά λόγω του ότι το  $x$  είναι στο τετράγωνο, το σχετικό σφάλμα είναι 2 φορές μεγαλύτερο:

$$|\Delta u| = 2s \Delta \left( \frac{1}{x^2} \right) = 2s \left( \frac{2\Delta x}{x^3} \right) \Rightarrow \delta_u = \frac{\Delta u}{u} = \frac{2s \left( \frac{2\Delta x}{x^3} \right)}{\left( \frac{2s}{x^2} \right)} = 2 \frac{\Delta x}{x} = 2 \times 1\% = 2\% .$$

Από το σχετικό σφάλμα, εύκολα υπολογίζουμε το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του κλάσματος  $2s/x^2$ :

$$\varepsilon_u = u \times \delta_u = \frac{2s}{x^2} \times 0,02 = 0,0002 \times 0,02 = 0,000004 .$$

Για την τιμή και το σφάλμα, η μετασχηματισμένη σχέση δίνει:

$$u = 0,000200 \pm 0,000004$$

ή

$$u = (2,00 \pm 0,04) \times 10^{-4} ,$$

με σχετικό σφάλμα 2 %, το οποίο είναι 50 (!!!) φορές καλύτερο από το 100 % που δίνει ο άμεσος υπολογισμός της διαφοράς και του σφάλματος.

**Σημείωση.** Όταν αφαιρούνται 2 περίπου ίσοι προσεγγιστικοί αριθμοί, σε ίδια θεαματική βελτίωση της ακρίβειας του αποτελέσματος οδηγεί και ο μετασχηματισμός της αρχικής σχέσης που γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u = \frac{1}{x-s} - \frac{1}{x+s} = \frac{2s}{x^2 - s^2} \approx \frac{2s}{x^2} ,$$

ο οποίος, όμως, είναι κάπως ειδικός και ενδείκνυται στη συγκεκριμένη αυτή περίπτωση.

Ο μετασχηματισμός της αρχικής σχέσης μέσω των σειρών Taylor είναι προτιμότερος, καθώς είναι γενικότερος και μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περίπτωση.

#### 5.4. Πολλαπλασιασμός δύο προσεγγιστικών αριθμών

Έστω γινόμενο δύο προσεγγιστικών αριθμών:

$$u = ab .$$

Στο γινόμενο, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_u = |a| \varepsilon_b + |b| \varepsilon_a , \quad (13)$$

όπου  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$  είναι τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των 2 αριθμών.

#### Παράδειγμα πολλαπλασιασμού δύο προσεγγιστικών αριθμών

Έστω ότι σε ένα κλειστό ηλεκτρικό κύκλωμα, η πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση είναι

$$U = 2,42 \pm 0,02 \text{ (V)},$$

ενώ το συνεχές ρεύμα που τη διαρρέει είναι

$$I = 1,21 \pm 0,01 \text{ (A)} .$$

Τα ακόμη ότι τα δύο διαστήματα σφαλμάτων είναι εγγυημένα. Να υπολογιστεί η εκλυόμενη στην αντίσταση θερμότητα, όπως και το σφάλμα της.

*Λύση.* Η εκλυόμενη ηλεκτρική ισχύς υπολογίζεται κανονικά και είναι

$$P = UI = 2,42 \times 1,21 \text{ (VA)} = 2,928 \text{.. W},$$

ενώ το σφάλμα αυτής της έμμεσης μέτρησης δεν υπερβαίνει την τιμή

$$\varepsilon_u = |a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a = U\varepsilon_I + I\varepsilon_U = 2,42 \times 0,01 \text{ (W)} + 1,21 \times 0,02 \text{ (W)} = 0,0484 \text{ W.}$$

Η σωστή παράσταση του αποτελέσματος με 2 ψηφία στο σφάλμα, που είναι επιτρεπτή, είναι

$$P = 2,928 \pm 0,048 \text{ (W)}, \quad \delta_P = 1,7 \%,$$

η οποία όμως δημιουργεί πλασματική εικόνα μεγαλύτερης ακρίβειας του γινομένου, συγκρινόμενη με την ακρίβεια των αρχικών τιμών της  $U$  και του  $I$ , που είναι κάπως αφύσικό. Φυσικό είναι το γινόμενο να έχει ίδια ή μικρότερη ακρίβεια των αρχικών τιμών.

Το ζήτημα της πλασματικής ακρίβειας αντιμετωπίζεται όταν η παράστασή του αποτελέσματος είναι όμοια με τις αρχικές τιμές, δηλαδή όταν η παράσταση του σφάλματος περιλαμβάνει μόνο ένα ψηφίο. Έτσι, στρογγυλεύοντας το σφάλμα προς 1 ψηφίο, η σωστή (σωστότερη) παράσταση του αποτελέσματος είναι

$$P = 2,93 \pm 0,05 \text{ (W)}, \quad \delta_P = 1,7 \%.$$

#### 5.4.1. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος γινομένου. Απόδειξη

Για να σχηματίσει ο αναγνώστης μία ιδέα για το πώς από το Γενικό ορισμό του σφάλματος προκύπτουν οι σχέσεις των σφαλμάτων στις 4 αριθμητικές πράξεις, τη σχέση για το γινόμενο θα την αποδείξουμε και εδώ. Στις άλλες 3 αριθμητικές πράξεις, οι συλλογισμοί είναι όμοιοι (βλ. Παράρτημα 8, σελ. 115).

Έστω δύο προσεγγιστικοί αριθμοί  $a$  και  $b$ , τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των οποίων είναι  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$ , αντίστοιχα. Θα υπολογίσουμε το εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon_u$ , του γινομένου  $u = ab$ .

*Λύση.* Έστω, ότι οι ακριβείς τιμές των προσεγγιστικών  $a$  και  $b$  είναι  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Έστω ότι  $a > 0$  και  $b > 0$ . Θα υποθέσουμε ακόμη ότι τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι άγνωστα.

Η ακριβής τιμή του γινομένου είναι  $U = AB$  και αναλύεται ως:

$$U = AB = (\Delta_a + a)(\Delta_b + b) = u + a\Delta_b + b\Delta_a + \Delta_a\Delta_b, \quad (14)$$

ενώ το ακριβές σφάλμα του γινομένου είναι

$$U - u = a\Delta_b + b\Delta_a + \Delta_a\Delta_b, \quad (15)$$

όπου  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι οι ακριβείς τιμές σφαλμάτων των  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα.

Επειδή οι τιμές  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι μικρές, το γινόμενο  $\Delta_a\Delta_b$  στην παραπάνω σχέση μπορεί να αγνοηθεί. Στην προσέγγιση αυτή, η σχέση (15) γίνεται:

$$U - u = a\Delta_b + b\Delta_a. \quad (16)$$

Αν περάσουμε στα μέτρα των  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$ , θα προκύψει η ανισότητα:

$$\Delta_u = |U - u| \leq a|\Delta_b| + b|\Delta_a|, \quad (17)$$

η οποία μόνο θα ενισχυθεί, αν τα μεγέθη  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  αντικατασταθούν με τα άνω όριά τους, δηλαδή τις τιμές  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$ , αντίστοιχα ( $|\Delta_a| \leq \varepsilon_a$  και  $|\Delta_b| \leq \varepsilon_b$ ). Έτσι προκύπτει η ανισότητα:

$$\Delta_u = |U - u| \leq a|\Delta_b| + b|\Delta_a| \leq a\varepsilon_b + b\varepsilon_a. \quad (18)$$

Τελικά, για εγγυημένο διάστημα σφάλματος του γινομένου μπορούμε να θέσουμε το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης. Αυτό δίνει:

$$\varepsilon_u = a\varepsilon_b + b\varepsilon_a. \quad (19)$$

Γενικότερα, όταν στο γινόμενο τα πρόσθημα των  $a$  και  $b$  διαφέρουν, στη σχέση για το εγγυημένο διάστημα σφάλματος συμμετέχουν τα μέτρα των  $a$  και  $b$ :

$$\varepsilon_u = |a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a. \quad (20)$$

**Σημείωση.** Η σχέση (19) θυμίζει το διαφορικό δύο μεταβλητών που πολλαπλασιάζονται:

$$du = d(ab) = adb + bda \quad \text{ή} \quad \Delta u = \Delta(ab) = a\Delta b + b\Delta a.$$

#### 5.4.2. Σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος πολλαπλασιασμού

Ευκολότερα απομνημονεύεται ο τύπος για το σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος:

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{a\varepsilon_b + b\varepsilon_a}{ab} = \frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{\varepsilon_b}{b} = \delta_a + \delta_b. \quad (21)$$

Επομένως,

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b. \quad (22)$$

#### 5.4.3. Υπολογισμός του σφάλματος γινομένου μέσω σχετικών σφαλμάτων

Έστω ότι πολλαπλασιάζονται οι προσεγγιστικοί αριθμοί  $a$  και  $b$ .

Αν τα σχετικά εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των αριθμών αυτών είναι 2 % και 3 %, αντίστοιχα, τότε το σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος του γινομένου είναι

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b = 2 \% + 3 \% = 5 \%. \quad (\text{υπολογίζεται τόσο απλά!})$$

Από το σχετικό σφάλμα  $\delta_u$ , εύκολα υπολογίζουμε το εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon_u$ :

$$\varepsilon_u = u\delta_u.$$

#### 5.5. Διαίρεση δύο προσεγγιστικών αριθμών

Έστω ότι  $u = a/b$  ( $b \neq 0$ ). Στη διαίρεση δύο προσεγγιστικών αριθμών, το διάστημα σφάλματος είναι εγγυημένο (βλ. Παράρτημα 8.4, σελ. 116), όταν αυτό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_u = \frac{|a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a}{b^2}. \quad (23)$$

##### 5.5.1. Σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος διαίρεσης

Και στη διαίρεση, για το σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος ισχύει όμοια σχέση με αυτήν του πολλαπλασιασμού:

$$\delta_u = \frac{\varepsilon_u}{u} = \frac{\frac{a\varepsilon_b + b\varepsilon_a}{b^2}}{\frac{a}{b}} = \frac{\varepsilon_a}{a} + \frac{\varepsilon_b}{b} = \delta_a + \delta_b. \quad (24)$$

Όπως και στον πολλαπλασιασμό, το σφάλμα μπορούμε να το υπολογίσουμε με 2 τρόπους: από τα εγγυημένα σφάλματα της σχέσης (23) ή από τα σχετικά σφάλματα της σχέσης (24).

##### 5.5.2. Παράδειγμα εφαρμογής της σχέσης (23)

Έστω ότι σε ένα κλειστό ηλεκτρικό κύκλωμα που περιλαμβάνει μία ωμική αντίσταση  $R$ , η πτώση τάσης στην αντίσταση είναι

$$U = 2,42 \pm 0,01 \text{ (V)},$$

ενώ το συνεχές ρεύμα που τη διαρρέει είναι

$$I = 1,21 \pm 0,01 \text{ (A)}.$$

Έστω ακόμη ότι τα δύο διαστήματα σφαλμάτων είναι εγγυημένα.

Από τα δεδομένα αυτά, να υπολογιστεί η τιμή της αντίστασης, όπως και το εγγυημένο διάστημα σφάλματός της.

*Λύση.* Η τιμή της αντίστασης υπολογίζεται κανονικά, από τη σχέση

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2,42 \text{ V}}{1,21 \text{ A}} = 2,000000 \text{ (}\Omega\text{)}.$$

Στην τιμή αυτή γράψαμε πολλά μηδενικά, προκειμένου να τη στρογγυλεύσουμε αργότερα, όταν υπολογίσουμε το εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon_R$ .

Το εγγυημένο διάστημα σφάλματος υπολογίζεται από τη σχέση (23):

$$\varepsilon_u = \frac{|a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a}{b^2} = \frac{U\varepsilon_I + I\varepsilon_U}{I^2} = \frac{2,42 \times 0,01 + 1,21 \times 0,01}{1,21^2} = 0,0248 < 0,025$$

Επομένως η σωστή παράσταση του αποτελέσματος είναι

$$R = 2,000 \pm 0,025 \text{ (}\Omega\text{)}.$$

### 5.5.3. Παράδειγμα εφαρμογής της σχέσης (24)

Το σφάλμα του πηλίκου μπορεί να υπολογιστεί και μέσω των σχετικών σφαλμάτων:

$$\delta_R = \frac{\varepsilon_R}{R} = \frac{\varepsilon_U}{U} + \frac{\varepsilon_I}{I} = \delta_U + \delta_I = \frac{0,01}{2,42} + \frac{0,01}{1,21} = 0,00413 + 0,00826 = 0,0124 \text{ ή περίπου } 1,2 \text{ \%}.$$

(βλ. σχέση 24), από την οποία το εγγυημένο διάστημα σφάλματος υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$\varepsilon_R = R\delta_R = 2 \times 0,0124 \text{ (}\Omega\text{)} = 0,0248 \text{ }\Omega < 0,025 \text{ }\Omega.$$

Επομένως και εδώ, η σωστή παράσταση του αποτελέσματος αυτής της έμμεσης μέτρησης είναι

$$R = 2,000 \pm 0,025 \text{ (}\Omega\text{)}, \quad \delta_R = 1,2 \text{ \%}.$$

**Σημείωση.** Η επιλογή, το διάστημα σφάλματος να παρουσιαστεί με 1 σημαντικό ψηφίο οδηγεί στην τιμή 0,03, η οποία διογκώνει το διάστημα σφάλματος κατά

$$0,005/025 = 0,20 \text{ ή } 20 \text{ \%}.$$

Αν τόσο μεγάλη διόγκωση το σφάλματος δεν είναι επιθυμητή, αυτό σημειώνεται ως έχει, δηλαδή ως 0,025. Αν όμως πρόκειται για το τελικό αποτέλεσμα του πειράματος, η διόγκωσή του κατά 20 % μερικές φορές θεωρείται ανεκτή. Στην περίπτωση αυτή το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να παρουσιαστεί και ως

$$R = 2,00 \pm 0,03 \text{ (}\Omega\text{)}.$$

Η τελευταία παράσταση είναι κομψότερη, αλλά και σωστότερη, καθώς είναι όμοια με τις αρχικές παραστάσεις του ρεύματος και της τάσης. Τέτοιες παραστάσεις είναι προτιμότερες.

### 5.6. Σφάλμα συνάρτησης προσεγγιστικών μεταβλητών

Σε μία συνάρτηση προσεγγιστικών μεταβλητών  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , όπου οι  $n$  μεταβλητές μετρήθηκαν άμεσα, με εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \dots \varepsilon_n$ , αντίστοιχα, όπου οι τιμές και τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων  $\Delta x_i$  είναι άγνωστα, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος της συνάρτησης υπολογίζεται από τη σχέση (βλ. Παράρτημα 9, σελ. 117):

$$\varepsilon_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \varepsilon_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \varepsilon_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \varepsilon_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| \varepsilon_3 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \varepsilon_n, \quad (25)$$

Όπως και στην πρόσθεση των προσεγγιστικών αριθμών, ο αριθμός των προσθετέων όρων συνιστάτε να είναι μικρότερος του 6. Η σχετική επιχειρηματολογία εξετάζεται στο Παράρτημα 12, σελ. 121.

### 5.6.1. Αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής. Άσκηση 5 (Μέτρηση ιξώδους της γλυκερίνης)

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί η πυκνότητα μίας μεταλλικής σφαίρας, η μάζα και η διάμετρος της οποίας είναι

$$m = 0,055 \pm 0,001 \text{ (g)} \quad \text{και} \quad d = 0,236 \pm 0,001 \text{ (cm)},$$

αντίστοιχα. Στο πείραμα, η μάζα μετρήθηκε με αναλυτικό ζυγό, ενώ η διάμετρος μετρήθηκε με ένα μικρόμετρο. Τα διαστήματα  $\pm 0,001 \text{ g}$  και  $\pm 0,001 \text{ cm}$  είναι εγγυημένα.

*Λύση.* Η πυκνότητα της μεταλλικής σφαίρας υπολογίζεται κανονικά:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} = \frac{6m}{\pi d^3} = \frac{6 \times 0,055 \text{ g}}{\pi (0,236)^3 \text{ cm}^3} = 7,99 \text{ g/cm}^3.$$

#### Πρώτος τρόπος υπολογισμού του σφάλματος

Το εγγυημένο διάστημα σφάλματος,  $\varepsilon_\rho$ , θα το υπολογίσουμε από τη σχέση

$$\varepsilon_\rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \varepsilon_m + \left| \frac{\partial \rho}{\partial d} \right| \varepsilon_d = \frac{6}{\pi d^3} \varepsilon_m + \frac{3 \times 6m}{\pi d^4} \varepsilon_d = \frac{6 \times 0,001}{3,14 \times (0,236)^3} + \frac{18 \times 0,055 \times 0,001}{3,14 \times (0,236)^4} \approx 0,145 + 0,102 \leq 0,25 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Επομένως η σωστή παράσταση της έμμεσης αυτής μέτρησης είναι:

$$\rho = 7,99 \pm 0,25 \text{ (g/cm}^3\text{)}.$$

Στην έμμεση αυτή μέτρηση το σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος είναι

$$\delta_\rho = \frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = \frac{0,25}{7,99} = 0,031 \quad \text{ή} \quad 3,1 \text{ \%}.$$

**Σημείωση.** Στο κείμενο της Άσκησης 5 (Μέτρηση ιξώδους γλυκερίνης) προτείνεται να θεωρηθεί αμελητέο το σφάλμα της διαμέτρου.

Δεν είναι δικαιολογημένη αυτή η πρόταση, καθότι όπως προκύπτει από τη λύση, ο όρος 0,102 της διαμέτρου είναι όντως μικρότερος του όρου 0,145, της μάζα, αλλά όχι σε τέτοιο βαθμό που να θεωρηθεί αμελητέος.

#### Δεύτερος τρόπος υπολογισμού, μέσω των σχετικών σφαλμάτων

Ο υπολογισμός του σφάλματος στην πυκνότητα μπορεί να γίνει και μέσω των σχετικών σφαλμάτων (του πηλίκου  $6\varepsilon_m/\pi d^3$ ), που είναι ευκολότερος:

$$\delta_\rho = \frac{\varepsilon_\rho}{\rho} = \frac{\frac{6\varepsilon_m}{\pi d^3} + \frac{6m \times 3\varepsilon_d}{\pi d^4}}{\frac{6m}{\pi d^3}} = \frac{\varepsilon_m}{m} + 3 \frac{\varepsilon_d}{d} = \delta_m + 3\delta_d = \frac{0,001}{0,055} + 3 \frac{0,001}{0,236} \approx 0,031.$$

$$\varepsilon_\rho = \rho \delta_\rho = 7,99 \times 0,031 \approx 0,25 \text{ (g/cm}^3\text{)}.$$

$$\rho = 7,99 \pm 0,25 \text{ (g / cm}^3\text{)}.$$

Εδώ η ακρίβεια ή το σχετικό σφάλμα της μέτρησης είναι της τάξης

$$0,25/7,99 \approx 3,1 \%,$$

όπως άλλωστε αναμενόταν, καθότι στη μάζα το σχετικό σφάλμα είναι

$$0,001/0,055$$

ή περίπου 1,8 %, ενώ στον όγκο της σφαίρας το σχετικό σφάλμα είναι 3 φορές μεγαλύτερο της διαμέτρου, που είναι

$$0,001/0,236 \approx 0,4 \%.$$

Αν προσθέσουμε τα δύο σχετικά σφάλματα, σε μία πρόχειρη εκτίμηση θα λάβουμε την τιμή

$$1,8 \% + 3 \times 0,4 \% = 3 \%,$$

που είναι πολύ κοντά στο σχετικό διάστημα σφάλματος που υπολογίσαμε με μεγαλύτερη σχολαστικότητα.

## 6. Γενικότεροι κανόνες παράστασης του σφάλματος

Στους χρήσιμους κανόνες που αναφέρονται στον εργαστηριακό οδηγό, θα προσθέσουμε 2 ακόμη.

**Κανόνας 1.** Προκειμένου να μην παραβιαστεί η βασική ανισότητα  $a - \varepsilon_a \leq A \leq a + \varepsilon_a$  και εκπέσει η εγγύηση, στις μαθηματικές πράξεις με προσεγγιστικούς αριθμούς, αλλά και στον ορισμό του  $\varepsilon_a$ , ο αριθμός  $\varepsilon_a$  πρέπει να στρογγυλεύεται μόνο προς τις υψηλότερες τιμές, καθότι στην Εφαρμοσμένη Φυσική και Υψηλή Τεχνολογία η εγγύηση του αποτελέσματος μέτρησης είναι παράγον σπουδαιότερος από το διάστημα του σφάλματος, το οποίο επιδιώκεται να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.

**Παράδειγμα 1:**  $\varepsilon_a = 0,06831 \approx 0,07$ .

**Παράδειγμα 2:**  $\varepsilon_a = 0,06421 \approx 0,064$ .

Στο παράδειγμα 2, η στρογγυλοποίηση προς 0,06 δεν είναι επιτρεπτή, καθώς εδώ ελλοχεύει ο κίνδυνος η πραγματική τιμή να βρεθεί εκτός του δηλωμένου διαστήματος και έτσι να εκπέσει η εγγύηση.

**Παράδειγμα 3:**  $\varepsilon_a = 0,06421$ .

Αν για κάποιο λόγο το εγγυημένο διάστημα σφάλματος πρέπει να παρουσιαστεί με ένα σημαντικό ψηφίο, ο αριθμός 0,06421 πρέπει να στρογγυλεύεται προς 0,07!

**Κανόνας 2.** Στις έμμεσες μετρήσεις, είναι προτιμότερο η τιμή και το σφάλμα να έχουν όμοια παράσταση με τις αρχικές τιμές που μετρήθηκαν άμεσα, καθότι η μαθηματική επεξεργασία των προσεγγιστικών αριθμών σπάνια παράγει αριθμούς μεγαλύτερης ακρίβειας. Συνήθως, η ακρίβειά τους είναι μικρότερη!

### 6.1. Σίγουρα και αμφίβολα ψηφία του προσεγγιστικού αριθμού

Στους προσεγγιστικούς αριθμούς είναι πολύ χρήσιμη η έννοια των σίγουρων ψηφίων, καθώς είναι καθιερωμένο, στην παράσταση των προσεγγιστικών αριθμών να συμμετέχουν μόνο τα σίγουρα ψηφία.

Έστω ότι ο προσεγγιστικός αριθμός  $a$  δίδεται σε δεκαδική μορφή:

$$a = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-(n-1)} \cdot 10^{m-(n-1)}.$$

**Ορισμός.** Τα πρώτα  $n$  ψηφία του δεκαδικού αριθμού είναι σίγουρα, όταν αυτός αποκλίνει από την πραγματική τιμή λιγότερο ή, το πολύ, κατά μισή μονάδα της  $n$ -οστής δεκαδικής τάξης της παράστασής του. Επομένως, όταν είναι γνωστό ότι

$$|a - A| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-(n-1)},$$

τότε στον αριθμό

$$a = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-(n-1)} \cdot 10^{m-(n-1)},$$

τα πρώτα  $n$  ψηφία:  $a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_{m-(n-1)}$ , είναι σίγουρα ψηφία.

### **Παράδειγμα προσδιορισμού των σίγουρων ψηφίων**

Έστω ότι η τιμή  $a = 35,97$  είναι προσέγγιση της ακριβούς  $A = 36$ .

Να εντοπιστούν τα σίγουρα ψηφία του προσεγγιστικού αριθμού  $a = 35,97$ .

*Λύση.* Καθώς το ακριβές σφάλμα των δύο όρων είναι

$$|a - A| = 0,03,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$|a - A| = 0,03 < 0,05 = \frac{1}{2} \times 0,1,$$

δηλαδή τα δέκατα του αριθμού 35,97 είναι σίγουρα. Επομένως, οι δεκάδες, οι μονάδες και τα δέκατα του αριθμού 35,97 είναι σίγουρα ψηφία, ενώ αμφίβολα είναι μόνο τα εκατοστά και, όπως βλέπουμε, κατά 3 μονάδες. Συνεπώς, η προσεγγιστική τιμή 35,97 έχει 3 σίγουρα ψηφία (το 3, το 5 και το 9) και ένα αμφίβολο (το 7).

### **6.2. Σημαντικά ψηφία του προσεγγιστικού αριθμού**

Στον εργαστηριακό οδηγό δίνεται ο ορισμός των σημαντικών ψηφίων, που είναι σωστός, ωστόσο ο ορισμός αυτός αναφέρεται στους κοινούς (ακριβείς) αριθμούς. Στον προσεγγιστικό αριθμό, σημαντικά θεωρούνται (είναι) μόνο τα σίγουρα ψηφία. Επομένως, τα αμφίβολα ψηφία του προσεγγιστικού αριθμού δεν συγκαταλέγονται στα σημαντικά.

### **6.3. Δεύτερο κριτήριο σίγουρων ψηφίων, πιο απλό!**

Πιο απλό είναι το εξής κριτήριο: όταν η αμφιβολία της αμφίβολης δεκαδικής τάξης είναι πάνω από 5 μονάδες, τότε αμφίβολο είναι και το ψηφίο της προηγούμενης δεκαδικής τάξης.

### **Πρώτο παράδειγμα εντοπισμού των σίγουρων ψηφίων**

Έστω παράσταση προσεγγιστικής τιμής σε μορφή:

$$d = 6,412 \pm 0,003 \text{ (mm)}.$$

Στο παράδειγμα αυτό, αμφίβολα είναι τα χιλιοστά της τιμής, κατά 3 μονάδες. Επομένως εδώ τα σίγουρα ψηφία είναι το 6, το 4 και το 1, ενώ το ψηφίο 2 είναι αμφίβολο.

### **Δεύτερο παράδειγμα εντοπισμού των σίγουρων ψηφίων**

Έστω παράσταση προσεγγιστικής τιμής σε μορφή:

$$d = 6,412 \pm 0,007 \text{ (mm)}.$$

Στην προσεγγιστική τιμή 6,412, ακόμη και τα εκατοστά έπαψαν να είναι σίγουρα, επειδή η αβεβαιότητα των χιλιοχτών είναι πάνω από 5 μονάδες. Συνεπώς, στην τιμή 6,412 αμφίβολα δεν είναι μόνο τα χιλιοστά, αλλά και τα εκατοστά. Συμπεραίνουμε ότι η προσεγγιστική τιμή 6,412 περιέχει 2 σίγουρα (το 6 και το 4) και δύο αμφίβολα ψηφία (το 1 και το 2).

### **Τρίτο παράδειγμα εντοπισμού των σίγουρων ψηφίων**

Έστω παράσταση προσεγγιστικής τιμής σε μορφή:

$$d = 6,4123 \pm 0,0074 \text{ (mm)},$$

που είναι επιτρεπτή.

Εδώ σίγουρα είναι μόνο τα ψηφία 6 και 4, καθώς τα τελευταία 3 ψηφία είναι αμφίβολα. Παρόμοιες παραστάσεις της τιμής και σφάλματος, παρότι είναι επιτρεπτές, είναι προτιμότερο να τις αποφεύγουμε, καθώς

**είναι άσκοπο, παράλογο και παραπλανητικό, στην τιμή να συμμετέχουν 3 αμφίβολα ψηφία!**

Σε ιδανική παράσταση της τιμής, αυτή περιλαμβάνει μόνο 1 αμφίβολο ψηφίο. Επιτρεπτή είναι και η παράσταση με 2 αμφίβολα ψηφία. Οριακά, με 3, όταν οι αριθμοί αυτοί χρησιμοποιούνται σε ενδιάμεσους υπολογισμούς.

**Σημείωση.** Στις περισσότερες περιπτώσεις τα σίγουρα ψηφία συμπίπτουν με τα ψηφία της πραγματικής τιμής, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο και δε συμβαίνει πάντα. Έτσι, για παράδειγμα, όταν αντί της ακριβής τιμής, 10, χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική 9,998, τότε λέμε ότι στην τιμή 9,998 σίγουρα είναι τα πρώτα τρία ψηφία, έστω αν κανένα από αυτά δε συμπίπτει με τα ψηφία της ακριβής.

## **7. «Σφάλματα» τυχαίων τιμών ( $\sigma \gg \Delta_{\text{οργ}}$ ). Αβεβαιότητα της μέσης τιμής**

Σε γενικές γραμμές, η ανάλυση του τυχαίου σφάλματος (αβεβαιότητας) δίνεται σε επαρκή έκταση στα εργαστηριακά εγχειρίδια. Σε σχέση, όμως, με την προηγούμενη ύλη, ένα μικρό πρόβλημα με την εγγύηση δημιουργείται στις τυχαίες τιμές, καθώς σε τιμές που υπακούουν, για παράδειγμα, στην κανονική κατανομή, το σφάλμα της μέσης τιμής δεν μπορούμε να εγγυηθούμε με σιγουριά 100 %. Μπορούμε να ορίσουμε σιγουριά μέτρησης (επίπεδο εμπιστοσύνης) 95,5 % ( $2\sigma_\mu$ ), 99,7 % ( $3\sigma_\mu$ ) ή 99,994 % ( $4\sigma_\mu$ ), αλλά όχι 100 %. Στη σιγουριά 100 % αντιστοιχεί άπειρο διάστημα εμπιστοσύνης ( $\infty\sigma_\mu$ ).

Η ανάλυση των τυχαίων τιμών αφορά το δεύτερο όρο της βασικής αρχής της Μετρολογίας, δηλαδή τον όρο  $\Delta_{\text{τυχ}}$  και γίνεται σε προσέγγιση ιδανικών μετρητών. Αντίστοιχα, η ανάλυση του μέρους του σφάλματος που οφείλεται στο σφάλμα του οργάνου γίνεται σε προσέγγιση απόλυτης επαναληψιμότητας των αποτελεσμάτων μέτρησης. Οι παραδοχές αυτές επιτρέπουν τον ξεχωριστό υπολογισμό των δύο συνιστωσών, όταν αυτές συνυπάρχουν.

Στις εργαστηριακές εκθέσεις των φοιτητών, η ανάλυση του σφάλματος δεν πρέπει να σταματά στον υπολογισμό του σφάλματος της μέσης τιμής, καθώς με τον υπολογισμό αυτό γίνεται μόνο η μισή δουλειά (!). Στο σφάλμα της μέσης τιμής πρέπει να προστεθεί και το μέρος του σφάλματος που οφείλεται στα όργανα, το οποίο είναι συχνά πολύ μεγαλύτερο.

Όπως τονίσαμε και στην εισαγωγή, εδώ λεπτό σημείο είναι ο τρόπος πρόσθεσης των δύο συνιστωσών. Έτσι, για να μπορούν τα δύο σφάλματα να προστεθούν, αυτά πρέπει να έχουν ίδια ή περίπου ίδια πιθανότητα κάλυψης (confidence level).

### **7.1. Μετρήσεις με μικρές τιμές του $n$ ( $3 < n < 10$ )**

Ένας ακόμη λόγος που συμβάλει στην υποεκτίμηση του τυχαίου «σφάλματος» (αβεβαιότητας της μέσης τιμής) είναι ο μικρός αριθμός του  $n$  στις μετρήσεις. Στην εργαστηριακή πρακτική, είναι συνήθως 5 ή 6.

Τονίζουμε, ότι στον εργαστηριακό οδηγό και στα εργαστηριακά εγχειρίδια των πανεπιστημίων, όλες οι μαθηματικές σχέσεις επεξεργασίας των τυχαίων σφαλμάτων αναφέρονται για μεγάλα  $n$  ( $n \geq 200$ ). Οι σχέσεις αυτές μπορούν να εφαρμοστούν και σε μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ), αλλά τότε τα στατιστικά μεγέθη που προκύπτουν από τις σχέσεις αυτές έχουν απροσδιόριστη πιθανότητα κάλυψης!

Στην κανονική κατανομή των σφαλμάτων και μεγάλες τιμές του  $n$  (θεωρητικά άπειρες), το διάστημα «σφάλματος» της μέσης τιμής ή το *τυπικό σφάλμα*, (ονομάζεται και *διάστημα εμπιστοσύνης confidence interval*) υπολογίζεται μέσω της γνωστής σχέσης:

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad (26)$$

το οποίο όμως καλύπτεται με πιθανότητα 68,3 %, δηλαδή το *επίπεδο εμπιστοσύνης* (confidence level) αυτού του διαστήματος είναι 68,3 % (Πίνακας 4, σελ. 157). Αντίστοιχα:

-το διάστημα «σφάλματος»  $\pm 2\sigma_{\mu}$  (διάστημα εμπιστοσύνης - confidence interval  $\pm 2\sigma_{\mu}$ ) καλύπτεται με πιθανότητα 95,5 % (επίπεδο εμπιστοσύνης - confidence level 95,5 %),

-το διάστημα «σφάλματος»  $\pm 3\sigma_{\mu}$  (διάστημα εμπιστοσύνης - confidence interval  $\pm 3\sigma_{\mu}$ ), καλύπτεται με πιθανότητα 99,7 % (επίπεδο εμπιστοσύνης - confidence level 99,7 %),

-το διάστημα «σφάλματος»  $\pm 4\sigma_{\mu}$  (διάστημα εμπιστοσύνης - confidence interval  $\pm 4\sigma_{\mu}$ ), καλύπτεται με πιθανότητα 99,994 % (επίπεδο εμπιστοσύνης - confidence level 99,994 %).

## 7.2. Συντελεστές Student

Όταν ο αριθμός των μετρήσεων είναι άπειρος ( $n = \infty$ ), οι πιθανότητες κάλυψης των διαστημάτων  $\pm \sigma_{\mu}$ ,  $\pm 2\sigma_{\mu}$  και  $\pm 3\sigma_{\mu}$  είναι 68,3, 95,5, και 99,7 %, αντίστοιχα. Ωστόσο, όταν ο αριθμός των μετρήσεων είναι μικρός ( $3 < n < 10$ ), οι πιθανότητες κάλυψης των παραπάνω διαστημάτων είναι απροσδιόριστες.

Πράγματι, είναι πολύ παρακινδυνευμένο να ισχυριστεί κανείς ότι με  $n = 4$ , το διάστημα «σφάλματος»  $\pm \sigma_{\mu}$ , που υπολογίζεται από τη σχέση (26) καλύπτεται με πιθανότητα 68,3 %. Ο ισχυρισμός αυτός γίνεται ακόμη πιο επισφαλής όταν εξετάζονται τα διαστήματα  $\pm 2\sigma_{\mu}$  και  $\pm 3\sigma_{\mu}$ , οι πιθανότητες κάλυψης των οποίων, για μεγάλα  $n$ , είναι 95,5 % και 99,7 %, αντίστοιχα.

Το θέμα των μικρών  $n$  εξετάστηκε από τον Άγγλο μαθηματικό William Sealy Gosset, ο οποίος με το ψευδώνυμο Student, το έτος 1908 δημοσίευσε την εργασία

### «The probable error of a mean»,

στην οποία έδειξε, ότι σε μετρήσεις με μικρά  $n$ , για να διατηρηθούν οι τιμές των πιθανοτήτων αμετάβλητες, δηλαδή να παραμείνουν όπως όταν  $n = \infty$ , η ποσότητα  $\sigma_{\mu}$  πρέπει να πολλαπλασιάζεται στους λεγόμενους συντελεστές Student,  $t_{n,p}$ , οι οποίοι εξαρτώνται από την πιθανότητα κάλυψης  $P$ , αλλά και από τον αριθμό μετρήσεων  $n$ .

Ο Gosset υπολόγισε τους συντελεστές αυτούς, τους οποίους μπορεί να αναζητήσει κανείς στους πίνακες συντελεστών Student, μέρος των οποίων δίνονται στον Πίνακα 5 (σελ. 158). Με τους συντελεστές Student, το διάστημα

$$\Delta_{\text{τυχ}} = t_{n,p} \sigma_{\mu}$$

αποκτά καθορισμένη (από εμάς) *πιθανότητα κάλυψης P*. Συνήθως, την πιθανότητα αυτή την επιλέγουμε σε επίπεδα 99,73 %, που είναι κοντά στα 100 % των οργάνων.

Επομένως, όταν ο όρος  $\Delta_{\text{τυχ}}$  επρόκειτο να προστεθεί στο σφάλμα του οργάνου που καλύπτεται με πιθανότητα 100 %, προκειμένου η πρόσθεση των 2 όρων να είναι δυνατή, στον πίνακα των συντελεστών Student επιλέγουμε τη στήλη με πιθανότητα  $P = 99,73$  %.

Σε μετρήσεις με μεγάλα  $n$  ( $n \geq 200$ ) και πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος σφάλματος 99,73 %, το τυπικό σφάλμα πρέπει να πολλαπλασιάζεται επί 3 ( $t_{n,p} = 3$ ):

$$\Delta_{\text{τυχ}} = 3\sigma_{\mu}, \quad n = \infty \quad P = 99,73 \%,$$

ωστόσο όταν το  $n$  είναι μικρό, για παράδειγμα 4, για να ισχύει η πιθανότητα κάλυψης 99,73 %, η ποσότητα  $\sigma_{\mu}$  πρέπει να πολλαπλασιαστεί όχι επί 3, αλλά επί  $t_{n,p} = 9,44$ , όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student για  $n = 4$  και πιθανότητα κάλυψης 99,73 %.

Από το παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι σε μετρήσεις με  $n = 4$ , αν αγνοήσουμε τους συντελεστές Student, ο πολλαπλασιασμός επί 3, έναντι του  $t_{n,p} = 9,44$ , επιφέρει υποεκτίμηση του τυπικού σφάλματος πάνω από 300 %!

### 7.3. Τυχαίες τιμές και σφάλμα οργάνου

Σύμφωνα με τη βασική αρχή της Μετρολογίας, σε μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων  $a_i$ , το ολικό σφάλμα της μέτρησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta_{\text{ολικό}} = \Delta_{\text{οργάνου}} + \Delta_{\text{τυχαίο}}.$$

Ωστόσο όπως τονίσαμε λίγο πιο πάνω, αλλά και στην εισαγωγή, για να είναι το άθροισμα αυτό δυνατό, οι δύο όροι πρέπει να έχουν ίδια ή περίπου ίδια πιθανότητα κάλυψης, η οποία επεκτείνεται και στο άθροισμά τους.

Καθώς ο όρος  $\Delta_{\text{οργ}}$  καλύπτεται με πιθανότητα 100 %, είναι σκόπιμο, για τον όρο  $\Delta_{\text{τυχ}}$  να επιλέγουμε την πιθανότητα κάλυψης 99,73 %, που είναι πολύ κοντά στο 100 % του οργάνου.

Σημειώνουμε ότι οι δύο όροι σφάλματος είναι ανεξάρτητη μεταξύ τους και επομένως μπορούν να προσδιοριστούν χωριστά, θεωρώντας τον άλλο μηδέν.

Σε άμεσες μετρήσεις με κακή επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων  $a_i$ , η τυπική απόκλιση των οποίων είναι  $\sigma$ , όπου  $\sigma \geq \Delta_{\text{οργ}}$  (βλ. Σχ. 8), ως τιμή του μετρούμενου μεγέθους σημειώνεται ο μέσος όρος των  $a_i$ , δηλαδή το  $\bar{a}$ , ενώ στο εγγυημένο διάστημα σφάλματος του οργάνου,  $\epsilon_a$ , προστίθεται και η αβεβαιότητα του μέσου όρου, δηλαδή το γινόμενο  $t_{n,\sigma_{\mu}}$ .

#### Παράδειγμα 1

Όταν στις μετρήσεις οι τυχαίες τιμές υπακούουν στην κανονική κατανομή και ο αριθμός των μετρήσεων είναι μεγάλος ( $n \geq 200$ ), ενώ το αποτέλεσμα μέτρησης επιθυμούμε να το «σιγουρέψουμε» με πιθανότητα κοντά στο 100 %, τότε το αποτέλεσμα μέτρησης σημειώνεται ως:

$$A = \bar{a} \pm (\Delta_{\text{οργ}} + 3\sigma_{\mu}), \quad P \geq 99,7 \%, \quad (27)$$

όπου  $\sigma_{\mu}$  είναι το τυπικό σφάλμα του μέσου όρου, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}}.$$

#### Παράδειγμα 2

Σε πειράματα με μικρό αριθμό μετρήσεων  $n$  ( $3 < n < 10$ ), το αποτέλεσμα μέτρησης σημειώνεται ως:

$$A = \bar{a} \pm (\Delta_{\text{οργ}} + t_{n,p}\sigma_{\mu}), \quad n = (...), \quad P \geq 99,7 \%, \quad (28)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student, που επιλέγεται από τη στήλη τιμών με  $P = 99,73 \%$ .

### 7.4. Ιδιαιτερότητα στην ανάγνωση των τυχαίων αποτελεσμάτων $a_i$ με ψηφιακούς μετρητές

Στις τυχαίες τιμές η ανάγνωση των αποτελεσμάτων μέτρησης  $a_i$  παρουσιάζει μία ιδιαιτερότητα, η οποία πηγάζει από τις ιδιότητες της τυπικής απόκλισης και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής.

Πράγματι, ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  και του τυπικού σφάλματος  $\sigma_{\mu}$  γίνεται από τις τυχαίες τιμές  $a_i$ . Επομένως η ακρίβεια των παραμέτρων  $\sigma$  και  $\sigma_{\mu}$  εξαρτάται από την ακρίβεια των τιμών  $a_i$ , που εμπεριέχουν μέσα τους το σφάλμα οργάνου ( $\gamma a_i + hr$ ).

Καθώς, όμως, το σφάλμα οργάνου είναι παρόν και στο μέσο όρο  $\bar{a}$  (με ίδια τιμή και πρόσημο),

είναι άξιο προσοχής το γεγονός ότι τα μεγέθη  $\sigma$  και  $\sigma_\mu$  μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια περίπου 10 φορές (!) μεγαλύτερη από την ακρίβεια των τιμών  $a_i$ , καθότι στον υπολογισμό της  $\sigma$  και  $\sigma_\mu$  συμμετέχουν οι διαφορές των  $a_i$  και  $\bar{a}$ , οι οποίες είναι απαλλαγμένες από το σφάλμα οργάνου. Το γεγονός αυτό επιτρέπει, οι όποιοι υπολογισμοί των παραμέτρων  $\sigma$  και  $\sigma_\mu$  να γίνονται σε προσέγγιση ιδανικών οργάνων, θεωρώντας τα σφάλματά τους 0. Ούτως ή άλλως, στο ολικό σφάλμα, το σφάλμα οργάνου λαμβάνεται υπόψη με τον όρο  $\Delta_{οργ}$ .

Συνεπώς, προκειμένου η ακρίβεια υπολογισμού (μέτρησης) του τυπικού σφάλματος  $\sigma_\mu$  να γίνει σε επίπεδα της διακριτικής ικανότητας  $r$  του ψηφιακού μετρητή, είναι σκόπιμο,

την ένδειξη του οργάνου να τη σημειώνουμε με όλα τα ψηφία που βλέπουμε στην οθόνη,

δίχως στρογγύλευμα, διατηρώντας και τα εσφαλμένα ψηφία στις τιμές των  $a_i$ . Η προτροπή αυτή αφορά και τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του χρόνου, με το χρονόμετρο χειρός, στο οποίο το σφάλμα οργάνου είναι πολύ μικρό ( $\varepsilon_{κνρ} \leq 10^{-5}$  %!). Στις μετρήσεις αυτές προβάλλει το τυχαίο σφάλμα των ανακλαστικών του ανθρώπου, με άνω όριο 0,1 s στις μεμονωμένες μετρήσεις. Έτσι, η ένδειξη 12,48 s πρέπει να σημειώνεται ως  $12,5 \pm 0,1$  (s), όπου το διάστημα  $\pm 0,1$  s είναι εγγυημένο και καλύπτεται με πιθανότητα 100 %.

Παρά ταύτα, καταφεύγοντας στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις με μεγάλα  $n$ , το σφάλμα των 0,1 s μπορούμε να το μειώσουμε, καθώς λόγω τυχαίου χαρακτήρα του (ακριβούς) σφάλματος στις μετρήσεις του χρόνου, το σφάλμα της μέσης τιμής έχει μεγάλα περιθώρια να μειωθεί, έως τα επίπεδα  $10^{-5}$  %!

Επομένως στις τυχαίες τιμές του χρόνου  $t_i$ , η ένδειξη του χρονομέτρου είναι σκόπιμο να σημειώνεται ως έχει, δίχως να τη στρογγυλεύουμε στα δέκατα της τιμής, δηλαδή στις ενδείξεις πρέπει να σημειώνονται και τα εκατοστά του δευτερολέπτου, αδιαφορώντας για το γεγονός ότι στις τιμές των  $t_i$ , μεταβάλλονται τυχαία ακόμη και τα δέκατα του δευτερολέπτου.

### **7.5. Ιδιαιτερότητα στην ανάγνωση των τυχαίων αποτελεσμάτων $a_i$ σε μετρήσεις με αναλογικούς μετρητές**

Και στους αναλογικούς μετρητές η ανάγνωση των τυχαίων αποτελεσμάτων  $a_i$  παρουσιάζει την ίδια ιδιαιτερότητα, παρότι εδώ το κέρδος στην ακρίβεια δεν είναι τόσο μεγάλο. Έτσι, στις τυχαίες τιμές,

*το αποτέλεσμα μέτρησης  $a_i$  το σημειώνουμε, εκτιμώντας και τα κλάσματα της  $\psi/2$ ,*

δίχως στρογγύλευμα ή ψηφιοποίηση της ένδειξης, αδιαφορώντας για το γεγονός ότι το τελευταίο ψηφίο στις τιμές  $a_i$  είναι εσφαλμένο και σε μεγάλο βαθμό αμφίβολο.

Η προτροπή αυτή πηγάζει από το γεγονός ότι στον υπολογισμό της  $\sigma_\mu$  συμμετέχουν οι διαφορές των τιμών  $a_i$  και  $\bar{a}$ , οι οποίες είναι απαλλαγμένες από το σφάλμα οργάνου, αλλά και σε μικρότερο βαθμό πάσχουν από την αβεβαιότητα με την οποία έγινε η εκτίμηση του κλάσματος της  $\psi/2$ . Συνεπώς, ο υπολογισμός του όρου  $\Delta_{τυχ}$  μπορεί να γίνει αγνοώντας τα σφάλματα του αναλογικού οργάνου, θεωρώντας το όργανο ιδανικό. Ούτως ή άλλως και εδώ, το σφάλμα οργάνου λαμβάνεται υπόψη στο ολικό σφάλμα με τον όρο  $\Delta_{οργ}$ .

## **8. Βέλτιστος αριθμός μετρήσεων $n_o$ ( $n_{optimum}$ )**

Στο πρόβλημα αυτό, όπως και σε πολλά άλλα, σε αυτοματοποιημένες μετρήσεις με υπολογιστές σημείο αναφοράς είναι το σφάλμα του οργάνου ή του A/D Converter (analog to digital converter)

Στις αυτοματοποιημένες μετρήσεις, ο αριθμός των μετρήσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Ωστόσο όταν οι πειραματικές τιμές υφίστανται έντονη διασπορά, προκειμένου να μην υπερφορτώνεται η μνήμη του υπολογιστή, ο αριθμός των πειραματικών τιμών που επιλέγονται πρέπει να είναι συσχετισμένος με το σφάλμα του οργάνου.

Πέραν του αριθμού αυτού η βελτίωση της ακρίβειας μέτρησης αρχίζει να γίνεται ασήμαντη, καθώς στο άθροισμα

$$\Delta_{\text{ολικο}} = \Delta_{\text{οργ}} + \Delta_{\text{τυχ}}$$

ο μεγάλος αριθμός μετρήσεων  $n$  βελτιώνει τον τυχαίο όρο  $\Delta_{\text{τυχ}}$ , ωστόσο το σφάλμα του οργάνου δεν το επηρεάζει.

Σε μετρήσεις αυτού του είδους είναι σκόπιμο να εισάγουμε την έννοια του βέλτιστου αριθμού μετρήσεων  $n_0$  ( $n_{\text{optimum}}$ ), που κάνει τους όρους  $\Delta_{\text{οργ}}$  και  $\Delta_{\text{τυχ}}$  ίσους.

Έτσι, όταν το διάστημα σφάλματος του οργάνου *είναι εγγυημένο και γνωστό*, σύμφωνα με την βασική αρχή της Μετρολογίας, στην πιο απλή περίπτωση, στο σφάλμα μέτρησης συμβάλουν το «σφάλμα» οργάνου και το «σφάλμα» (*αβεβαιότητα*) της μέσης τιμής:

$$\Delta_a = \Delta_{\text{οργ}} + \Delta_{\text{τυχ}} = \Delta_{\text{οργ}} + t_{n,p}\sigma_{\mu}, \quad P \geq 99,7 \% \quad (29)$$

**Ορισμός.** Ο αριθμός των μετρήσεων  $n$  είναι βέλτιστος («λογικός»), όταν το «σφάλμα» της μέσης τιμής είναι όσο το «σφάλμα» του οργάνου, δηλαδή όταν στη σχέση (29) οι δύο όροι είναι ίσοι:

$$\Delta_{\text{οργ}} = t_{n,p}\sigma_{\mu}. \quad (30)$$

Για τα τετράγωνα, η σχέση (30) μπορεί να σημειωθεί ως:

$$\Delta_{\text{οργ}}^2 = t_{np}^2 \sigma_{\mu}^2 = t_{np}^2 \frac{\sigma^2}{n_0}, \quad (31)$$

από την οποία προκύπτει, ότι ο βέλτιστος αριθμός  $n_0$  είναι

$$n_0 = t_{np}^2 \left( \frac{\sigma}{\Delta_{\text{οργ}}} \right)^2, \quad (32)$$

όπου  $\sigma^2$  είναι η διασπορά (dispersion ή το τετράγωνο του standard deviation ή το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης) των τυχαίων τιμών.

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να δούμε ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα** ( $\sigma = 10\Delta_{\text{οργ}}$ , έντονος τυχαίος θόρυβος στις μετρήσεις)

Στην επιστημονική έρευνα, αλλά και σε μερικές εκπαιδευτικές ασκήσεις, το μετρούμενο μέγεθος παρουσιάζει έντονη διακύμανση της τιμής, όπως, για παράδειγμα, στην καταγραφή του ηλεκτρικού σήματος που έγινε με υπολογιστή και βλέπουμε στο Σχ. 8.

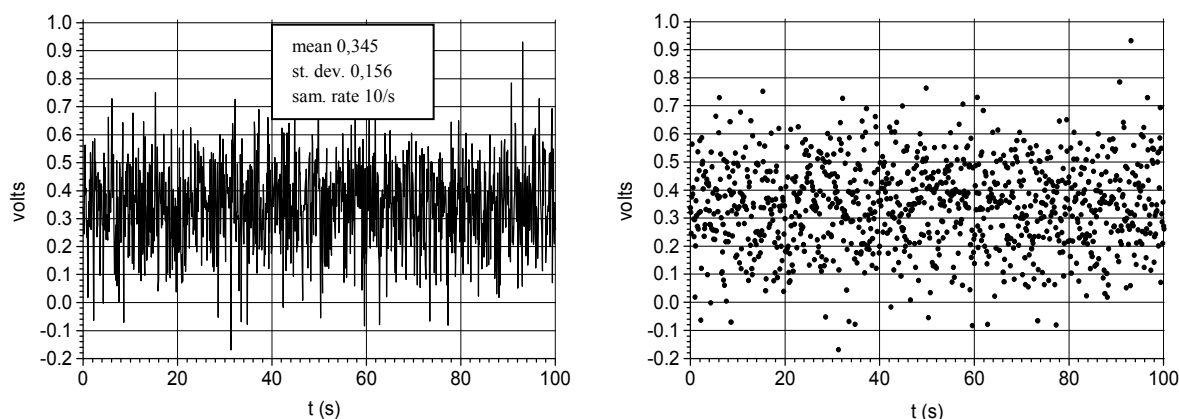
Ο υπολογιστής υπολογίζει την τυπική απόκλιση και τη μέση τιμή αυτού το σήματος, ωστόσο τα πειραματικά σημεία και ο αριθμός τους *επιλέγονται από τον ερευνητή* (στην καταγραφή, με αριστερό κλικ ο κέρσορας σέρνεται πάνω από τα επιλεγμένα πειραματικά σημεία, που χρωματίζονται).

Στα πειράματα αυτά, για να γίνεται η μέτρηση του σήματος *σε επίπεδα ακρίβειας του οργάνου* (A/D - Converter), αλλά και να μην υπερφορτώνεται η μνήμη του υπολογιστή, είναι σκόπιμο ο αριθμός των πειραματικών σημείων να είναι βέλτιστος, τον οποίο θα αναζητήσουμε ακολουθώντας την εξής σειρά συλλογισμών.

Στη σχέση (32), για  $\sigma = 10\Delta_{\text{οργ}}$ , το  $n_0$  είναι σίγουρα μεγαλύτερο από 100, όπου για πιθανότητα κάλυψης 99,73 % οι συντελεστές Student με καλή προσέγγιση είναι 3 (για  $n = 100$  και  $P = 99,73 \%$ ,  $t_{n,p} = 3,007$ ).

Όταν έχουμε τόσο έντονη «μέση διασπορά» στις πειραματικές τιμές, για να ισχύει η σχέση  $\Delta_{\text{οργ}} = t_{n,p}\sigma_{\mu}$ , ο αριθμός των μετρήσεων πρέπει να είναι

$$n_0 = t_{np}^2 \left( \frac{\sigma}{\Delta_{\text{οργ}}} \right)^2 = 3^2 \times 10^2 = 900!$$



**Σχήμα 8.** Εικόνα ενός έντονα θορυβουμένου ηλεκτρικού σήματος στο καταγραφικό του υπολογιστή.

Σύμφωνα με τη σχέση (29), το σφάλμα μέτρησης είναι 2 φορές αυτό του οργάνου, δηλαδή του A/D Converter:

$$\Delta_a = \Delta_{οργ} + \Delta_{τυχ} = \Delta_{οργ} + t_{n,p}\sigma_{\mu} = 2\Delta_{οργ}, \quad (P \geq 99,7 \%) \quad (33)$$

και καλύπτεται με πιθανότητα πάνω από 99,73 %.

Συνήθως, στη λεζάντα της καταγραφής (Σχ. 8) ο υπολογιστής παρουσιάζει και τα κυριότερα χαρακτηριστικά το τυχαίου σήματος: τη μέση τιμή (mean: 0,345), την τυπική απόκλιση (standard deviation: 0,156), το ρυθμό δειγματοληψίας (sample rate: 10/s), την ελάχιστη και μέγιστη τιμή στην καταγραφή κ.α.

Σημειώνουμε ότι σε μετρήσεις με υπολογιστή, το σφάλμα οργάνου προσδιορίζεται από το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του A/D Converter, βλ. Παράρτημα 7, σελ. 114), που στα εκπαιδευτικά A/D είναι της τάξης 0,2-0,5 %.

Επομένως, όταν τηρείται ο όρος  $\sigma \approx 10\Delta_{οργ}$ , ακόμη και με 900 πειραματικές τιμές, στην καλύτερη περίπτωση το σφάλμα μέτρησης είναι της τάξης 0,4-1 %. Με μικρότερο ή πολύ μικρότερο αριθμό μετρήσεων, στο σφάλμα του τόσο θορυβουμένου σήματος θα συμβάλει κυρίως το σφάλμα της μέσης τιμής, καθώς στη σχέση (33) ο δεύτερος όρος θα είναι μεγαλύτερος ή πολύ μεγαλύτερος του πρώτου.

## 9. Ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης των διαστημάτων σφάλματος σε έμμεσες μετρήσεις

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, διαστήματα εμπιστοσύνης (τυπικές αποκλίσεις) με διαφορετική πιθανότητα κάλυψης δεν μπορούν να προστεθούν. Από πρακτική σκοπιά, το ζήτημα της πρόσθεσης εμφανίζεται σε πειράματα όπου ο ερευνητής αναγκάζεται να επεξεργαστεί προσεγγιστικά μεγέθη που καλύπτονται με διαφορετική πιθανότητα κάλυψης των σφαλμάτων, για παράδειγμα, 100 %, 68,3 % ή και μικρότερη.

Εδώ ακολουθούμε τον εξής γενικό κανόνα: Σε μία αλγεβρική σχέση όπου συμμετέχουν προσεγγιστικά μεγέθη με διαφορετική πιθανότητα κάλυψης των σφαλμάτων, πριν υπολογιστεί το «σφάλμα» της σχέσης, τα διαστήματα «σφαλμάτων» πρέπει να προσαρμοστούν κατάλληλα προκειμένου να αποκτήσουν ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης. Μόνο τότε η πιθανότητα αυτή μπορεί να επεκταθεί και στο ολικό διάστημα σφάλματος της σχέσης.

Θυμίζουμε, ότι στη συνάρτηση  $f(x, y, z)$ , όπου οι μεταβλητές  $x, y, z$  είναι τυχαίες, για τις μέσες τιμές  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , όπως και τα σφάλματά τους, για μεγάλα  $n$  ( $n_x \geq 200, n_y \geq 200, n_z \geq 200$ ), ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\mu x}, \quad y = \bar{y} \pm \sigma_{\mu y}, \quad z = \bar{z} \pm \sigma_{\mu z},$$

όπου  $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

Ωστόσο, για να γράψει κανείς τη σχέση για το τυπικό σφάλμα της  $f$ :

$$\sigma_{mf} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_{\mu x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_{\mu y}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_{\mu z}^2},$$

πρέπει τα μεγέθη  $\sigma_{\mu x}$ ,  $\sigma_{\mu y}$  και  $\sigma_{\mu z}$  να έχουν ίδια πιθανότητα κάλυψης.

Η προσαρμογή των πιθανοτήτων επιτυγχάνεται με τους κατάλληλους συντελεστές του Πίνακα 4, όταν ο αριθμός μετρήσεων  $n$  είναι μεγάλος ή τους συντελεστές Student, του Πίνακα 5, όταν ο αριθμός  $n$  είναι μικρός.

## 10. Υπολογισμός του εγγυημένο διαστήματος σφάλματος με χρήση διαφορικών

Η μέθοδος αυτή είναι η πλέον προσοδοφόρα και χρησιμοποιείται ευρύτατα από τους ερευνητές. Προς επίδειξη της εφαρμογής της, θα υπολογίσουμε ακόμη μία φορά το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του γινομένου, αλλά τώρα με χρήση διαφορικών.

Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του γινομένου

$$u = xy.$$

*Λύση.* Θεωρούμε, ότι τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των τιμών  $x$  και  $y$  δίνονται και είναι  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε επίσης, ότι είναι άγνωστα τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων  $\Delta_x$  και  $\Delta_y$ .

**Βήμα 1.** Διαφορίζουμε το γινόμενο  $u = xy$ . Αυτό δίνει:

$$du = ydx + xdy. \quad (35)$$

**Βήμα 2.** Η παραπάνω σχέση ισχύει και για πεπερασμένα  $\Delta u$ ,  $\Delta x$ , και  $\Delta y$ , αρκεί αυτά να είναι μικρά:

$$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y. \quad (36)$$

**Βήμα 3.** Καταφεύγουμε στις απόλυτες τιμές των αντίστοιχών μεγεθών. Θα προκύψει ανισότητα:

$$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y \leq |y||\Delta x| + |x||\Delta y|. \quad (37)$$

**Βήμα 4.** Αντικαθιστούμε τα μέτρα των τιμών με τα αντίστοιχα εγγυημένα σφάλματα  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$ . Από την αντικατάσταση αυτή η ανισότητα μόνο θα ενισχυθεί, καθώς  $|\Delta x| \leq \varepsilon_x$  και  $|\Delta y| \leq \varepsilon_y$ . Έχουμε τελικά:

$$\varepsilon_u = |y|\varepsilon_x + |x|\varepsilon_y. \quad (38)$$

Η τελευταία σχέση δίνει τη λύση.

Στον Πίνακα 3 (σελ. 156) παραθέτουμε μερικά παραδείγματα διάδοσης του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος σε διάφορες συναρτήσεις. Σημειώνουμε, ότι όλες οι σχέσεις του Πίνακα 3 υπολογίστηκαν με χρήση διαφορικών.

## 11. Διαφορική μέθοδος μέτρησης

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η ακρίβεια του αναλογικού μετρητικού οργάνου αξιοποιείται επαρκώς όταν ο δείκτης βρίσκεται στο τελευταίο τέταρτο της κλίμακας του. Επομένως σε μικρές τιμές της κλίμακας ( $Z \approx 0,1Z_{max}$ ) η ακρίβεια μέτρησης είναι μικρή (μεγάλο σχετικό σφάλμα).

Παρά ταύτα, καλή ακρίβεια μέτρησης μπορεί να επιτευχθεί και στις μικρές τιμές της κλίμακας (βελτίωση ακρίβειας 3-4 φορές), εφαρμόζοντας τη διαφορική μέθοδο μέτρησης, κάνοντας ακόμη μία μέτρηση, περίπου δύο φορές μικρότερη. Σε σύγκριση με την απλή, στη διαφορική μέθοδο επιτυγχάνεται μικρότερο σφάλμα μέτρησης λόγω του ότι ένα σημαντικό μέρος του σφάλματος του οργάνου αποβάλλεται από τους υπολογισμούς (απαλείφεται), όπως, για παράδειγμα, το κύριο σφάλμα του αναλογικού μετρητή, το οποίο έχει ίδια τιμή και πρόσημο στις 2 τιμές.

Για παράδειγμα, έσω τιμές  $a_1 \pm (\varepsilon_{av} + \varepsilon_{κνρ})$  και  $a_2 \pm (\varepsilon_{av} + \varepsilon_{κνρ})$ . Η διαφορά αυτών των 2 τιμών ( $u = a_1 - a_2$ ) είναι απαλλαγμένη από το κύριο σφάλμα του οργάνου ( $\varepsilon_{κνρ}$ ), ενώ στο προσκήνιο προβάλλουν τα 2 σφάλματα ανάγνωσης στις 2 τιμές, με άνω όριο  $2\varepsilon_{av}$ , στην πλέον δυσμενή κατάσταση όταν η ανάγνωση τις μίας τιμής έγινε με έλλειμμα (η βελόνα του οργάνου ήταν πιο πάνω από την ένδειξη  $a_1$ , ενώ της άλλης έγινε με πλεόνασμα (η βελόνα του οργάνου ήταν πιο κάτω από την ένδειξη  $a_2$ ). Το αποτέλεσμα της διαφοράς των 2 τιμών σημειώνεται ως:

$$u = (a_1 - a_2) \pm 2\varepsilon_{av},$$

δηλαδή δίχως τη συμμετοχή στην παράσταση του κύριου σφάλματος του αναλογικού οργάνου.

## 12. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε συνάρτηση τύπου $y = A + Bx$ .

### 12.1. Εισαγωγή

Σε πολλά ζητήματα Φυσικής, η σχετική θεωρητική ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα μεγέθη  $x$  και  $y$  συμμετέχουν σε μία γραμμική σχέση τύπου:

$$y = A + Bx.$$

Σκοπός του πειράματος είναι ο πειραματικός έλεγχος αυτής της υπόθεσης, ο οποίος περιλαμβάνει δύο ξεχωριστά θέματα:

- (α) πειραματικός έλεγχος της ορθότητας ή μη της σχετικής θεωρητικής ανάλυσης που οδηγεί στη παραπάνω γραμμική σχέση,
- (β) πειραματικός προσδιορισμός των παραμέτρων  $A$  και  $B$  της γραμμικής σχέσης, πίσω από τα οποία βρίσκεται κάποιο ενδιαφερόμενο φυσικό μέγεθος, που ζητείται να προσδιοριστεί.

Για το σκοπό αυτό μετράνε τις τιμές  $y_i$  για διάφορες τιμές  $x_i$  και ελέγχουν αν οι τιμές αυτές ικανοποιούν μία γραμμική σχέση τύπου:

$$y_i = a + bx_i$$

Ως προς τις τιμές των παραμέτρων  $a$  και  $b$  της πειραματικής ευθείας ( $y = a + bx$ ), λόγω σφαλμάτων των οργάνων, αλλά και διασποράς των τιμών  $y_i$ , δεν αναμένουμε να συμπίπτουν με τις πραγματικές, δηλαδή τις τιμές  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Με την έννοια αυτή:

$$A = a \pm \Delta a \quad \text{και} \quad B = b \pm \Delta b.$$

Ως προς τον πρώτο σκοπό του πειράματος, αν δηλαδή η σχέση μεταξύ των μεταβλητών  $y_i$  και  $x_i$  είναι γραμμική, το γεγονός αυτό συνιστά πειραματική επιβεβαίωση της ορθότητας και επάρκειας της σχετικής θεωρητικής ανάλυσης που οδηγεί στη γραμμική σχέση. Στην αντίθετη περίπτωση η ανάλυση είναι εσφαλμένη ή ανεπαρκής.

Ως προς τον δεύτερο σκοπό του πειράματος, το ενδιαφερόμενο φυσικό μέγεθος προτιμάται να είναι ενσωματωμένος στην κλίση της πειραματικής ευθείας  $b$ .

Η μέθοδος κλίσης, που είναι παραλλαγή της διαφορικής μεθόδου, αποβάλλει μερικά σφάλματα των 2 οργάνων και, επομένως, η κλίση της πειραματικής ευθείας μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια μεγαλύτερη από την ακρίβεια των τιμών  $y_i$  και  $x_i$  (!). Εδώ εντοπίζεται το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου κλίσης, η οποία, γενικά, μπορεί να εφαρμοστεί και σε συνθήκες μηδενικής (αμελητέας) διασποράς των αποτελεσμάτων μέτρησης.

Όταν γίνεται λόγος για τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ουσιαστικά πρόκειται για τη μέθοδο κλίσης σε συνθήκες τυχαίας παρεμβολής στις μετρήσεις. Εδώ ο προσδιορισμός των αβεβαιοτήτων και των παραμέτρων της πειραματικής ευθείας  $a$  και  $b$ , γίνεται με όρους της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Μαθηματικής Στατιστικής.

Σε συνθήκες τυχαίας παρεμβολής στις μετρήσεις, προκειμένου η ανάλυση του πειραματικού αποτελέσματος να είναι σχετικά πλήρης, μεταξύ άλλων, πρέπει να προσδιοριστούν και οι τυπικές αποκλίσεις,  $\sigma_y$  και  $\sigma_x$ , των δύο μεταβλητών, οι οποίες συμβάλουν στα «σφάλματα» (αβεβαιότητες) των παραμέτρων  $a$  και  $b$  της πειραματικής ευθείας, ακόμη και όταν τα δύο όργανα είναι ιδανικά.

### 12.2. Προσέγγιση του προβλήματος σε συνθήκες $\sigma_x = 0$ και $\sigma_y = \text{σταθ}$

Η ανάλυση του προβλήματος σε συνθήκες  $\sigma_x \neq 0$  και  $\sigma_y \neq 0$  είναι δυσκολότερη, αν συγκριθεί με την κατάσταση όπου  $\sigma_x = 0$  και  $\sigma_y \neq 0$ . Η ανάλυση της δεύτερης κατάστασης απαντάται σχεδόν σε όλα τα πανεπιστημιακά εργαστηριακά εγχειρίδια, όπως και στο δικό μας εργαστηριακό οδηγό. Τονίζουμε, ότι η προσέγγιση αυτή δεν περιλαμβάνει τα σφάλματα των 2 οργάνων και γίνεται με 2 βασικές παραδοχές:

- (α) η διασπορά των τιμών  $x_i$  είναι μηδέν ( $\sigma_x = 0$ ), δηλαδή τη διασπορά την υφίσταται μόνο οι τιμές των  $y_i$  ( $\sigma_y \neq 0$ ),
- (β) σε όλη την κλίμακα των τιμών  $y_i$ , η διασπορά τους είναι ίδια, δηλαδή  $\sigma_y = \text{σταθ}$ .

Στις σημειώσεις αυτές θα κάνουμε ένα βήμα ακόμη, περιλαμβάνοντας στην ανάλυση και τα σφάλματα των δύο οργάνων, ακολουθώντας τη βασική αρχή της Μετρολογίας. Επομένως, το σφάλμα στην κλίση της βέλτιστης ευθείας,  $y = a + bx$ , θα το αναζητήσουμε σε μορφή

$$B = b \pm \Delta b_{ολ}$$

όπου

$$\Delta b_{ολ} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ}, \quad P \geq 99,7 \%$$

Ως προς τη σειρά των υπολογισμών των όρων  $\Delta b_{οργ}$  και  $\Delta b_{τυχ}$ , θα τηρήσουμε την παράδοση των πανεπιστημιακών εγχειριδίων, εξετάζοντας πρώτα τον όρο  $\Delta b_{τυχ}$ , καθώς οι φοιτητές είναι εξοικειωμένοι με αυτόν τον όρο, όπως και με τις μεθόδους υπολογισμού του.

### 12.3. Οι σχέσεις για τις παραμέτρους $a$ και $b$ , $\delta a$ και $\delta b$ , της βέλτιστης ευθείας $y = a + bx$

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να αναφέρουμε τις σχέσεις του εργαστηριακού οδηγού που αναφέρονται στις παραμέτρους  $a$  και  $b$ , όπως και  $\delta a$  και  $\delta b$ , της βέλτιστης πειραματικής ευθείας,  $y = a + bx$ , η οποία με τον καλύτερο τρόπο προσομοιώνει τα πειραματικά σημεία:

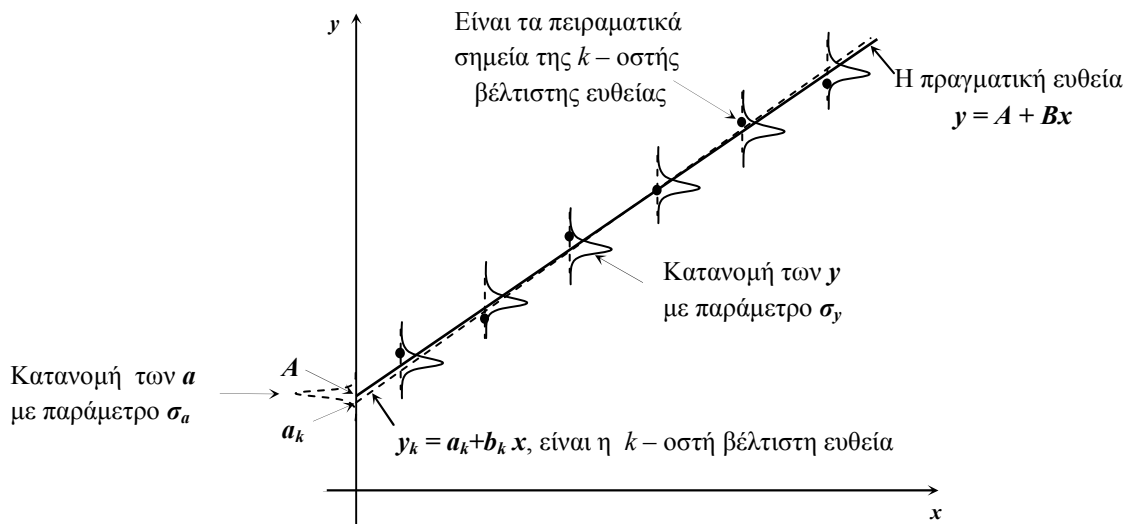
$$a = \frac{(\sum y_i) \times (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \times (\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (39, 40)$$

$$\delta a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \times \frac{(\sum x_i^2) \times (\sum d_i^2)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad \delta b = \delta a \sqrt{\frac{n}{\sum x_i^2}}, \quad (41, 42)$$

Στο βαθμό που στις παραπάνω σχέσεις δε λαμβάνονται υπόψη τα σφάλματα των 2 οργάνων, είναι προτιμότερο οι παράμετροι  $\delta a$  και  $\delta b$  να αποκαλούνται αβεβαιότητες των παραμέτρων  $a$  και  $b$ . Όπως θα δούμε πιο κάτω, είναι σωστότερα τα μεγέθη αυτά να αποκαλούνται τυπικές αποκλίσεις των παραμέτρων  $a$  και  $b$  της βέλτιστης ευθείας και να σημειώνονται ως  $\delta a_{τυχ}$  και  $\delta b_{τυχ}$ .

## 12.4. Μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων

Στο μοντέλο της μεθόδου (βλ. Σχ. 9) που εξετάζεται στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και εδώ, τα μετρητικά όργανα θεωρούνται ιδανικά, ενώ διασπαρμένες θεωρούνται μόνο οι τιμές των  $y_i$ , ωστόσο με ίδια διασπορά σε όλα τα πειραματικά σημεία  $(x_i, y_i)$  (στο Σχ. 9, γκαουσιανές με ίδιο ύψος και πλάτος, δηλαδή  $\sigma_y = \text{σταθ}$ ).



Σχήμα 9. Μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων του εργαστηριακού οδηγού.

Προφανώς, τα πειρατικά ζεύγη πρέπει να είναι πάνω από 2, καθότι για  $n = 2$  η πειραματική ευθεία ορίζεται μονοσήμαντα. Συνεπώς, στο μοντέλο της μεθόδου  $n \geq 3$ . Επίσης, λόγω διασποράς των τιμών  $y_i$ , οι τιμές των  $a$  και  $b$  της βέλτιστης πειραματικής ευθείας αναμένουμε να διαφέρουν από τις ακριβείς τιμές  $A$  και  $B$ , κατά  $\Delta a_{\text{τυχ}}$  και  $\Delta b_{\text{τυχ}}$ , αντίστοιχα.

Έτσι, λόγω τυχαίου χαρακτήρα των τιμών των  $y_i$ , δεν αναμένουμε τα  $n$  πειραματικά ζεύγη  $(x_i, y_i)$  να ορίσουν μία ευθεία ταυτόσημη με την πραγματική, δηλαδή την  $y = A + Bx$ .

Οι παράμετροι  $a$  και  $b$  της βέλτιστης πειραματικής ευθείας,  $y = a + bx$ , δεν είναι βέλτιστοι γενικώς, αλλά είναι βέλτιστοι μόνο για τη συγκεκριμένη ομάδα πειραματικών ζευγών  $(x_i, y_i)$ . Μία επανάληψη του πειράματος θα δώσει άλλα πειραματικά ζεύγη  $(x_i, y_i)$ , από τα οποία θα προκύψει άλλη βέλτιστη ευθεία, με άλλες τιμές των  $a$  και  $b$  κ.ο.κ. Με την έννοια αυτή, οι παράμετροι  $a$  και  $b$  είναι τυχαίοι αριθμοί, με τυπικές αποκλίσεις («μέσες διασπορές»)  $\sigma_a$  και  $\sigma_b$ , αντίστοιχα. Προφανώς, οι διασπορές αυτές εξαρτώνται από τη διασπορά των τιμών  $y_i$ .

Στο μοντέλο της μεθόδου (βλ. Σχ.9), για να μετρηθούν οι ακριβείς τιμές  $A$  και  $B$ , πρέπει να υπολογιστούν άπειρες βέλτιστες ευθείες

$$y = a_k + b_k x$$

και, στη συνέχεια, οι τιμές  $A$  και  $B$  να υπολογιστούν ως μέσοι όροι των  $a_k$  και  $b_k$ , αντίστοιχα. Η εικόνα αυτή παραπέμπει στη μέση τιμή και στην την αβεβαιότητα της μέσης τιμής, όταν το  $k$  τείνει στο άπειρο.

Στην πειραματική πρακτική, οι ερευνητές περιορίζονται στην αναζήτηση μόνο της μίας βέλτιστης ευθείας (της πρώτης του θεωρητικού μοντέλου), ενώ τις όποιες ιδιότητες του άπειρου συνόλου τις αντλούν από τις ιδιότητες αυτής της ευθείας.

Παρόμοια κατάσταση επικρατεί και στο μοντέλο μέτρησης της απλής τυχαίας τιμής, όπου η πραγματική τιμή αντικαθίσταται από τον μέσο όρο, συνοδευμένο από το διάστημα εμπιστοσύνης και επίπεδο εμπιστοσύνης, με το οποίο το διάστημα καλύπτει τον μέσο όρο.

Επομένως και στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, τις πραγματικές τιμές  $A$  και  $B$ , της ακριβής σχέσης  $y = A + Bx$ , τις αντικαθιστούν με τις προσεγγιστικές,  $a$  και  $b$  της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = a + bx$  και τις σημειώνουν ως:

$$A = a \pm \sigma_{a\mu}, \quad P = 68,3 \% \quad (44)$$

και

$$B = b \pm \sigma_{b\mu}, \quad P = 68,3 \%, \quad (45)$$

θεωρώντας, ότι οι τιμές των παραμέτρων της βέλτιστης πειραματικής ευθείας εμπεριέχουν *αβεβαιότητες* («αβεβαιότητα της μέσης τιμής»)  $\sigma_{a\mu}$  και  $\sigma_{b\mu}$ , αντίστοιχα.

Καθώς οι αβεβαιότητες  $\sigma_{a\mu}$  και  $\sigma_{b\mu}$  εξαρτώνται από τη τυπική απόκλιση  $\sigma_y$  (όταν  $\sigma_y = 0$ , οι αβεβαιότητες αυτές είναι 0), τα μεγέθη αυτά μπορούν να υπολογιστούν, αν με κάποιον τρόπο δίνεται η τυπική απόκλιση  $\sigma_y$  των τιμών  $y_i$ . (βλ. Παράρτημα 5, σελ. 108-109, όπου οι σχέσεις για τις αβεβαιότητες  $\sigma_{a\mu}$  και  $\sigma_{b\mu}$  αποδεικνύονται αυστηρά).

Όταν η τυπική απόκλιση  $\sigma_y$  των τιμών  $y_i$  είναι άγνωστη (ως συνήθως), ο ερευνητής καταφεύγει στον πειραματικό προσδιορισμό αυτής της παραμέτρου, ωστόσο ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να γίνει με 2 τρόπους:

**Τρόπος πρώτος.** Σε ένα συγκεκριμένο σημείο  $x_i$ , μετράνε  $k$  φορές την τιμή  $y_i$ , αξιοποιώντας τον ορισμό της τυπικής απόκλισης

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_k - \bar{y})^2}{(n-1)}},$$

Στις μετρήσεις αυτές το  $k$  το φανταζόμαστε μεγάλο ( $k \geq 200$ ).

**Τρόπος δεύτερος.** Στο βαθμό που η παράμετρος  $\sigma_y$  είναι ίδια σε όλα τα πειραματικά σημεία  $(x_i, y_i)$ , αναμένουμε ίδια διασπορά των πειραματικών σημείων γύρο από τη βέλτιστη ευθεία. Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της παραμέτρου  $\sigma_y$  μέσω διασποράς των πειραματικών σημείων γύρο από τη βέλτιστη πειραματική, δηλαδή μέσω των  $d_i$ , όπου

$$d_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i.$$

αξιοποιώντας τη σχέση για το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum d_i^2}{(n-2)}.$$

Επομένως για να εφαρμοστεί η δεύτερη μέθοδος, πρέπει πρώτα να υπολογιστούν οι παράμετροι  $a$  και  $b$  της βέλτιστης πειραματικής και, στη συνέχεια, να υπολογιστούν οι αποκλίσεις  $d_i$ .

Συνήθως, στην πειραματική πρακτική προτιμάται ο δεύτερος τρόπος, η οποίος τον πρώτο τον κάνει περιττό, ωστόσο πρέπει πάντα να θυμόμαστε ότι η εφαρμογή της δεύτερης μεθόδου προϋποθέτει την τήρηση του όρου  $\sigma_y = \text{σταθ}$ .

Τονίζουμε, ότι δίχως τη διερεύνηση της συνθήκης:

$$\sigma_y = \text{σταθ},$$

η εφαρμογή της δεύτερης μεθόδου δεν έχει στέρεα επιστημονική βάση και τα όποια αποτελέσματα είναι αμφίβολα και επισφαλή.

## 12.5. Πειραματικός προσδιορισμός των παραμέτρων της βέλτιστης πειραματικής ευθείας

Στην πρακτική των εκπαιδευτικών εργαστηρίων, σκοπός της πειραματικής διαδικασίας είναι η διερεύνηση της γραμμικότητας της σχέσης μεταξύ των μεταβλητών  $x$  και  $y$ , όπως και η μέτρηση της κλίσης της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $b$ , στην οποία είναι ενσωματωμένο κάποιο φυσικό μέγεθος που ζητείται να προσδιοριστεί.

Καθώς η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι αναλυτική, από τα πειραματικά ζεύγη  $(x_i, y_i)$  μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  της βέλτιστης ευθείας, αλλά και η αβεβαιότητα στην κλίση της πειραματικής ευθείας. Ακολούθως, υπολογίζεται η αβεβαιότητα του φυσικού μεγέθους.

Σπάζοντας την παράδοση των εργαστηριακών εγχειριδίων, στις σημειώσεις αυτές το σφάλμα στην κλίση θα το αναζητήσουμε σε μορφή

$$\Delta \mathbf{b}_{ολικο} = \Delta \mathbf{b}_{οργ} + \Delta \mathbf{b}_{τυχ}$$

λαμβάνοντας υπόψη και τα σφάλματα των 2 οργάνων!

Ωστόσο για λόγους καλύτερης εποπτείας, είναι χρήσιμο να τηρήσουμε την παράδοση των πανεπιστημιακών εργαστηριακών εγχειριδίων, αρχίζοντας πρώτα από τους τυχαίους όρους  $\delta \mathbf{b}_{τυχ}$  και  $\delta \mathbf{a}_{τυχ}$ , δηλαδή τους όρους που οφείλονται στη διασπορά των τιμών  $y_i$ . Τους όρους του σφάλματος που οφείλονται στα σφάλματα των δύο οργάνων θα τους εξετάσουμε αμέσως μετά, ακολουθώντας την εξής σειρά υπολογισμών:

1.  $\Delta_{τυχ}$ ,
2.  $\Delta_{οργ}$ ,
3.  $\Delta_{ολ} = \Delta_{οργ} + \Delta_{τυχ}$ .

### 12.6. Τυπική απόκλιση των κλίσεων $b_k$ , λόγω διασποράς των $y_i$

Θα υπολογίσουμε τον όρο  $\Delta \mathbf{b}_{τυχ}$  σε προσέγγιση ιδανικών μετρητών ( $\Delta \mathbf{b}_{οργ} = \mathbf{0}$ ), θεωρώντας άπειρες βέλτιστες πειραματικές ευθείες τύπου  $\mathbf{y} = \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k \mathbf{x}$  (βλ. Σχ. 9), επομένως και άπειρες τιμές  $\mathbf{b}_k$ , της  $\mathbf{b}$ .

Στη βασική σχέση της Μετρολογίας

$$\Delta \mathbf{b}_{ολ} = \Delta \mathbf{b}_{οργ} + \Delta \mathbf{b}_{τυχ}$$

ο όρος  $\Delta \mathbf{b}_{τυχ}$  εξαρτάται από τη «μέση διασπορά» των κλίσεων ( $\mathbf{b}_k$ ) των  $k$  ευθειών, δηλαδή την τυπική απόκλιση των κλίσεων  $\sigma_{b_k}$ .

Ωστόσο η γενεσιουργός αιτία στη διασπορά των κλίσεων είναι η διασπορά στις τιμές των  $y_i$ , με τυπική απόκλιση  $\sigma_y$ . Έτσι, αν μηδενιστεί η διασπορά στις τιμές των  $y_i$ , θα μηδενιστεί και η διασπορά στις κλίσεις των  $k$  ευθειών! Με την έννοια αυτή, η τυπική απόκλιση των κλίσεων είναι συνάρτηση της τυπικής απόκλισης των τιμών  $y_i$ , δηλαδή  $\sigma_b = f(\sigma_y)$ .

Το είδος της συνάρτησης  $f$  υπολογίζεται αναλυτικά στο Παράρτημα 5 του παρόντος (σελ. 109), αλλά αναφέρεται (δίχως απόδειξη) και στον εργαστηριακό οδηγό, ως «σφάλμα»  $\delta \mathbf{b}$  της κλίσης  $\mathbf{b}$ , της βέλτιστης ευθείας, ενώ στην πραγματικότητα πρόκειται για την τυπική απόκλιση ή «μέση διασπορά» των τιμών  $\mathbf{b}_k$  των  $k$  ευθειών του μοντέλου.

Σημειώνουμε ακόμη, ότι η σχέση  $\delta \mathbf{b} = f(\sigma_y)$  του οδηγού είναι κάπως άβολη, καθώς η  $\delta \mathbf{b}$  ορίζεται μέσω της  $\delta \mathbf{a}$ , που στην επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων συνήθως δεν ενδιαφέρει. Αυτό αναγκάζει τους φοιτητές να υπολογίζουν πρώτα την  $\delta \mathbf{a}$ , προκειμένου στη συνέχεια να υπολογίσουν τη  $\delta \mathbf{b}$ , παρότι ο υπολογισμός της  $\delta \mathbf{a}$  είναι περιττός!

Στην ανάλυση που ακολουθεί, τα μεγέθη  $\delta \mathbf{a}$  και  $\delta \mathbf{b}$  του εργαστηριακού οδηγού θα τα αποκαλούμε με το όνομά τους, δηλαδή μέσες διασπορές ή τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή όχι σφάλμα. Για να τονιστεί αυτός ο διαχωρισμός, θα τα συμβολίζουμε ως  $\sigma_a$  και  $\sigma_b$ .

Η ισοδύναμη σχέση για το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης της  $\mathbf{b}$  (των  $\mathbf{b}_k$  του μοντέλου) είναι

$$\sigma_b^2 = \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \times \sigma_y^2 \quad (46)$$

(βλ. Παράρτημα 5). Στη σχέση αυτή, στο βαθμό που  $\sigma_y = \sigma_{ταθ}$ , η παράμετρος διασποράς  $\sigma_y$  των τιμών  $y_i$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum d_i^2}{(n-2)}, \quad (47)$$

όπου  $d_i = y_i - a - bx_i$ .

Τελικά, το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης των τιμών  $b_k$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\sigma_b^2 = \frac{n\sigma_y^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \times \frac{\sum d_i^2}{(n-2)}. \quad (48)$$

### 12.7. Τυπική απόκλιση στις κλίσεις $b_k$ , όταν ο αριθμός $n$ είναι μικρός

Όταν ο αριθμός των πειραματικών ζευγών  $(x_i, y_i)$  είναι μικρός, είναι απαραίτητη η χρήση των συντελεστών Student. Έτσι, για μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ), ο όρος  $\Delta b_{\text{τυχ}}$  του ολικού σφάλματος:

$$\Delta b_{\text{ολ}} = \Delta b_{\text{οργ}} + \Delta b_{\text{τυχ}}$$

υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta b_{\text{τυχ}} = t_{n,p}\sigma_b, \quad n = (\dots), \quad P = 99,73 \%, \quad (50)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

### 12.8. Τυπική απόκλιση του ελεύθερου όρου $a$ , λόγω διασποράς των τιμών $y_i$

Και εδώ, πρέπει να υπολογίσουμε του δύο όρους του αθροίσματος:

$$\Delta a_{\text{ολικο}} = \Delta a_{\text{οργ}} + \Delta a_{\text{τυχ}}$$

αρχίζοντας παραδοσιακά από τον όρο  $\Delta a_{\text{τυχ}}$ .

Προφανώς, ο όρος  $\Delta a_{\text{τυχ}}$  εξαρτάται από τη παράμετρο διασποράς  $\sigma_a$  των  $a_k$  (βλ. Σχ. 9), η οποία εξαρτάται επίσης από τη διασπορά των τιμών  $y_i$ , δηλαδή από την παράμετρο  $\sigma_y$ .

Το είδος της σχέσης

$$\sigma_a = z(\sigma_y)$$

υπολογίζεται αναλυτικά στο Παράρτημα 5 του παρόντος, αλλά λίγο σε διαφορετική μορφή αναφέρεται (δίχως απόδειξη) και στον εργαστηριακό οδηγό ως «σφάλμα»,  $\delta a$ , της  $a$ , της βέλτιστης ευθείας. Ωστόσο, εδώ, το μέγεθος αυτό θα το αποκαλούμε τυπική απόκλιση των  $a_k$ .

Η *ισοδύναμη* σχέση για το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης των  $a_k$ , δηλαδή η  $\sigma_a^2$ , έχει τη μορφή

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \sigma_y^2, \quad (51)$$

όπου η παράμετρος διασποράς  $\sigma_y$  των τιμών  $y_i$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{(n-2)}. \quad (52)$$

Όταν ο αριθμός των πειραματικών ζευγών είναι μικρός, ( $3 < n < 10$ ), τότε ο όρος  $\Delta a_{\text{τυχ}}$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta a_{\text{τυχ}} = t_{n,p}\sigma_a, \quad n = (\dots), \quad P = 99,73 \%, \quad (54)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

## 12.9. Συνεισφορά των 2 οργάνων στο σφάλμα της κλίσης

### 12.9.1. Εισαγωγή

Σύμφωνα με τη βασική αρχή της μετρολογίας:

$$\Delta b_{\text{ολικο}} = \Delta b_{\text{οργ}} + \Delta b_{\text{τυχ}}$$

Έστω ότι οι 2 μετρητές είναι ψηφιακοί. Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι ο υπολογισμός του όρου  $\Delta b_{\text{οργ}}$ , συναρτήσει των βασικών παραμέτρων ακρίβειας των 2 ψηφιακών οργάνων, δηλαδή των παραμέτρων  $\gamma_x, h_x r_x$  και  $\gamma_y, h_y r_y$ .

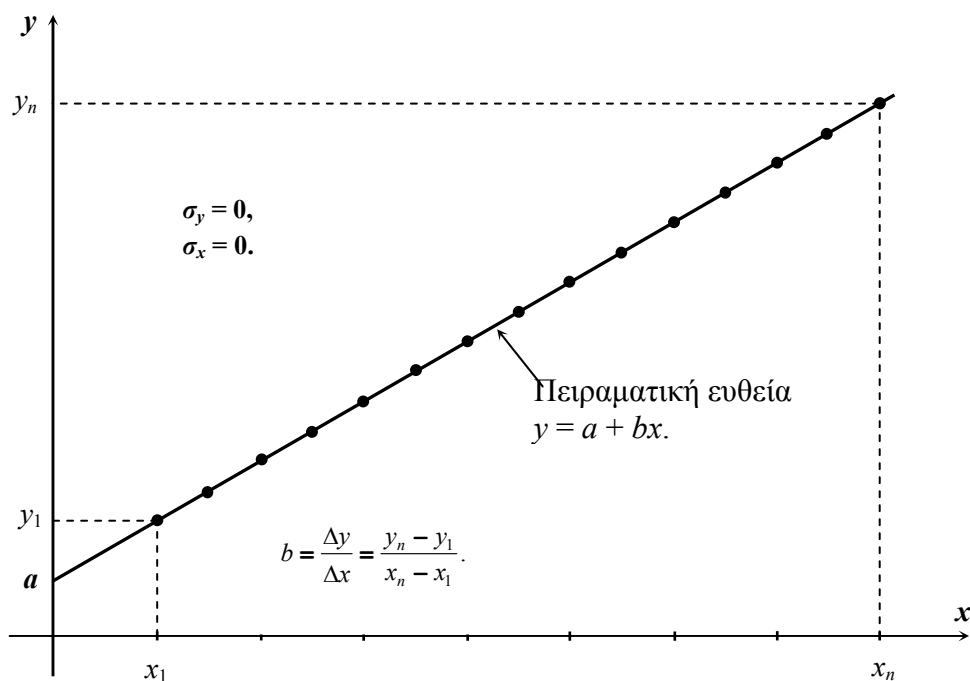
Στο μέρος αυτό, ο όρος  $\Delta b_{\text{οργ}}$  υπολογίζεται σε προσέγγιση μηδενικής διασποράς των πειραματικών τιμών  $y_i$ , δηλαδή θεωρούμε ότι στο πείραμα τηρούνται οι όροι  $\sigma_y = 0$  και  $\sigma_x = 0$ . Επομένως, τηρείται και ο όρος  $\Delta b_{\text{τυχ}} = 0$ .

Γενικότερα, ο όρος  $\sigma_y = 0$  παραπέμπει στη γραφική παράσταση που βλέπουμε στο Σχ. 10, όπου τα πειραματικά σημεία  $(x_i, y_i)$  τα φανταζόμαστε να συμπίπτουν απόλυτα με την ευθεία

$$y = a + bx,$$

την οποία θα αποκαλούμε *πειραματική*. Ωστόσο λόγω σφαλμάτων των 2 οργάνων, δεν αναμένουμε η πειραματική ευθεία να συμπίπτει με την την πραγματική:

$$y = A + Bx.$$



**Σχήμα 10.** Γραφική παράσταση των πειραματικών σημείων σε συνθήκες  $\sigma_y = 0$  και  $\sigma_x = 0$ .

Επομένως η όλη ανάλυση συνιστάται στην αναζήτηση των 2 οριακών ευθειών, εντός των οποίων με σιγουριά 100 % βρίσκεται η ευθεία η πραγματική. Προφανώς, οι 2 οριακές ευθείες κατασκευάζονται λαμβάνοντας υπόψη τα οριακά σφάλματα των 2 οργάνων.

Από τη σκοπιά αυτή, ο όρος  $\Delta b_{\text{οργ}}$  υπολογίζεται ως διαφορά στις κλίσεις των 2 οριακών ευθειών, ενώ η σιγουριά του 100 % παρέχεται όταν στην κατασκευή των 2 ευθειών λαμβάνονται υπόψη τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των 2 οργάνων.

Πιο κάτω θα δούμε, ότι για τον υπολογισμό του όρου  $\Delta b_{opg}$  αρκεί η αναζήτηση της μίας οριακής ευθείας και, στη συνέχεια, να υπολογιστεί η διαφοροποίηση της κλίσης της από την κλίση την πειραματική. Με την έννοια αυτή, η αναζήτηση της δεύτερης οριακής ευθείας είναι περιττή.

Όταν επιθυμούμε να ελέγξουμε πειραματικά την υπόθεση περί γραμμικής σχέσης μεταξύ των μεταβλητών  $x$ , και  $y$ , μετράμε  $n$  πειραματικά ζεύγη και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Όταν τα πειραματικά σημεία σχηματίζουν όντως μία ευθεία, όπως στο Σχ. 10, το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της πειραματικής ευθείας,  $a$  και  $b$ , λαμβάνοντας υπόψη τις συντεταγμένες μόνο των 2 οριακών πειραματικών σημείων, δηλαδή των σημείων

$$(x_1, y_1) \text{ και } (x_n, y_n),$$

αγνοώντας (!) τα ενδιάμεσα, καθώς αυτά χρησιμεύουν μόνο για τον έλεγχο της γραμμικότητας της σχέσης  $y = y(x)$ .

Σε συνθήκες απουσίας διασποράς των πειραματικών σημείων, δηλαδή όταν τηρούνται οι όροι  $\sigma_y = 0$  και  $\sigma_x = 0$ , η κλίση της πειραματικής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}, \quad (55)$$

ενώ ο ελεύθερος όρος  $a$  υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$y_1 = a + bx_1,$$

και

$$y_n = a + bx_n,$$

από τις οποίες προκύπτει η σχέση:

$$a = \frac{y_n + y_1}{2} - b \frac{(x_n + x_1)}{2}. \quad (56)$$

Σε συνθήκες όπου τηρείται ο όρος  $\sigma_y = 0$ , που δεν είναι σπάνιες (αμελητέες τυχαίες διακυμάνσεις των  $y_i$ ), ο υπολογισμός των παραμέτρων  $a$  και  $b$  πρέπει (μπορεί) να γίνεται από τις σχέσεις (55) και (56).

Σε συνθήκες, όμως, όπου τηρείται ο όρος  $\sigma_y \neq 0$ , ο υπολογισμός των παραμέτρων  $a$  και  $b$  πρέπει να γίνεται από τους τύπους της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Αλλά και σε συνθήκες  $\sigma_y \neq 0$ , οι σχέσεις (55) και (56) είναι χρήσιμες, καθότι μας βοηθούν (επιτρέπουν) να υπολογίσουμε το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση της πειραματικής ευθείας, συναρτήσει των εγγυημένων σφαλμάτων των 2 οργάνων, δηλαδή μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τον όρο  $\Delta b_{opg}$  της βασικής αρχής της Μετρολογίας, ο οποίος υπολογίζεται θεωρώντας τη συνθήκη  $\sigma_y = 0$ .

Σκοπός της γραφικής ανάλυσης που ακολουθεί είναι να εντοπιστούν οι 2 οριακές ευθείες, Z-E και Γ-Δ (Σχ. 11), με κλίσεις  $b + \Delta b_{opg}$  και  $b - \Delta b_{opg}$ , αντίστοιχα, εντός των οποίων με σιγουριά 100 % βρίσκεται η ευθεία η πραγματική.

Προφανώς, το διάστημα  $\pm \Delta b_{opg}$  εξαρτάται από τα σφάλματα των 2 οργάνων, αλλά ο τρόπος κατασκευής των οριακών ευθειών Z-E και Γ-Δ εξαρτάται από τις ιδιότητες των σφαλμάτων  $\delta x$  και  $\delta y$ , οι οποίοι εξαρτώνται από το είδος των μετρητών, είναι δηλαδή αναλογικοί ή ψηφιακοί.

### 12.9.2. Κατασκευή των 2 οριακών ευθειών

Στο Σχ. 11 δίνεται ο τρόπος κατασκευής των 2 οριακών ευθειών.

Προκειμένου η ευθεία να είναι οριακή, η ευθεία με τη μέγιστη δυνατή κλίση κατασκευάζεται όταν στο πηλίκο

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ο αριθμητής  $\Delta y$  έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή, ενώ ο παρονομαστής  $\Delta x$  - την ελάχιστη.

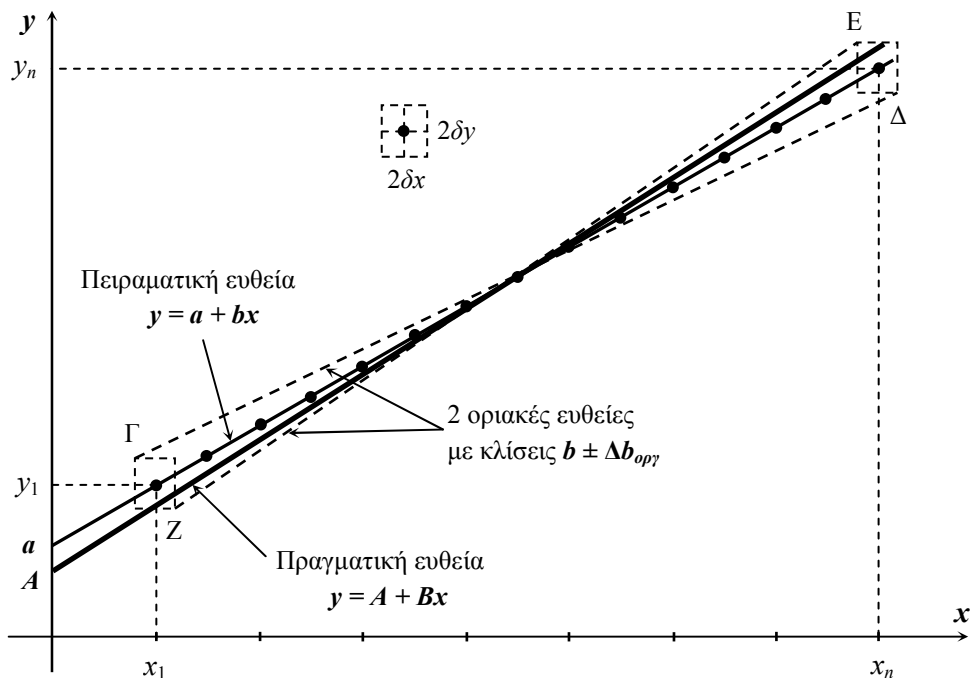
Ο όρος  $\Delta y$  μεγιστοποιείται, όταν στο σφάλμα της τιμής  $y_1$  προσδίδεται πρόσημο αρνητικό ( $\delta y_1 < 0$ ), ενώ της τιμής  $y_n$ , προσδίδεται πρόσημο θετικό ( $\delta y_n > 0$ ).

Ο όρος  $\Delta x$  ελαχιστοποιείται, όταν στο σφάλμα της τιμής  $x_1$ , του προσδίδεται πρόσημο θετικό ( $\delta x_1 > 0$ ), ενώ της τιμής  $x_n$ , πρόσημο αρνητικό ( $\delta x_n < 0$ ).

Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζεται η ευθεία με τη μέγιστη δυνατή κλίση, δηλαδή η ευθεία Z-E (Σχ. 11), όπου

$$b_{Z-E} = b + \Delta b_{οργ}.$$

Με όμοια κριτήρια κατασκευάζεται και η οριακή ευθεία με την ελάχιστη δυνατή κλίση, δηλαδή η ευθεία Γ-Δ, όπου  $b_{Γ-Δ} = b - \Delta b_{οργ}$ , ωστόσο στην ευθεία Γ-Δ, στις τιμές  $x_1$ ,  $x_n$ , και  $y_1$ ,  $y_n$ , στα σφάλματά τους προσδίδονται αντίθετα πρόσημα.



Σχήμα 11. Κατασκευή των 2 οριακών ευθειών, Z-E και Γ-Δ.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, για τον υπολογισμό του σφάλματος στην κλίση της πειραματικής ευθείας, δηλαδή του όρου  $\Delta b_{οργ}$ , αρκεί η κατασκευή της ευθείας με τη μέγιστη δυνατή κλίση, δηλαδή της ευθείας Z-E, ενώ είναι περιττή η κατασκευή της ευθείας με την ελάχιστη δυνατή κλίση, δηλαδή της ευθείας Γ-Δ. Προφανώς, αυτό διευκολύνει τους υπολογισμούς.

Στην πειραματική πρακτική απαντώνται 4 χαρακτηριστικές καταστάσεις, οι οποίες χρίζουν ιδιαίτερης μεταχείρισης:

1. Οι δύο μετρητές είναι ψηφιακοί (σφάλματα τύπου:  $\gamma_x x_i + h_x r_x$  και  $\gamma_y y_i + h_y r_y$ ).
2. Οι δύο μετρητές είναι αναλογικοί (σφάλματα τύπου:  $\psi$ ,  $\psi/2$ ,  $\delta x_{κνρ}$ ,  $\delta x_{αν}$ , και  $\delta y_{κνρ}$ ,  $\delta y_{αν}$ ).
3. Ο μετρητής των  $x$  είναι αναλογικός, ενώ των  $y$  είναι ψηφιακός.
4. Ο μετρητής των  $x$  είναι ψηφιακός, ενώ των  $y$  είναι αναλογικός.

Θα υπολογίσουμε τον όρο  $\Delta b_{opγ}$  στις τέσσερις αυτές καταστάσεις, αρχίζοντας από την κατάσταση 1, η οποία στα σύγχρονα εργαστήρια απαντάται συχνότερα.

### 12.9.3. Όργανα ψηφιακά. $\Delta b_{opγ}$ σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές ( $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ )

Θα υπολογίσουμε το σφάλμα στην κλίση  $b$ , της βέλτιστης πειραματικής ευθείας

$$y = a + bx,$$

λαμβάνοντας υπόψη μόνο τα 2 οριακά πειραματικά σημεία, όπως και τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων στα σημεία αυτά, δηλαδή τα σφάλματα  $\delta x_1$  και  $\delta x_n$ , όπως και τα σφάλματα  $\delta y_1$  και  $\delta y_n$ .

Έστω ότι στους μετρητές των τιμών  $x_i$  και  $y_i$ , που μετρήθηκαν άμεσα, αλλά και στην ίδια κλίμακα, οι ακρίβειες των ψηφιακών οργάνων δίνονται σε μορφή:

$$\text{Accuracy (x): } \gamma_x (\%) + h_x r_x$$

και

$$\text{Accuracy (y): } \gamma_y (\%) + h_y r_y,$$

αντίστοιχα.

Από τις 2 παραπάνω παραστάσεις, για τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων,  $\delta x$  και  $\delta y$ , προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\delta x_1 = x_1 \gamma_x + h_x r_x,$$

$$\delta x_n = x_n \gamma_x + h_x r_x$$

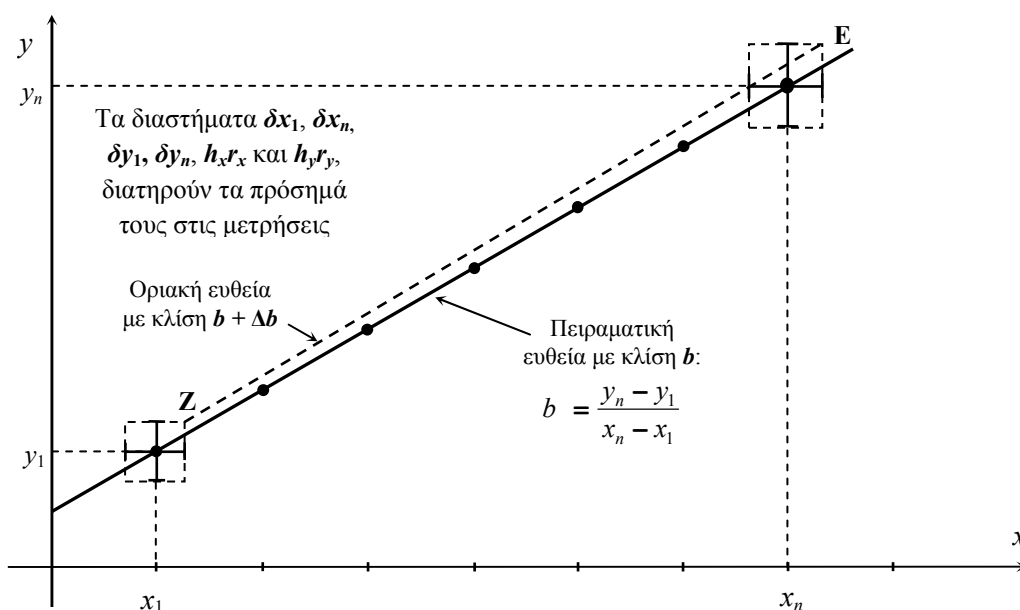
και

$$\delta y_1 = y_1 \gamma_y + h_y r_y,$$

$$\delta y_n = y_n \gamma_y + h_y r_y.$$

Οι σταθεροί όροι  $h_x r_x$  και  $h_y r_y$  δεν επηρεάζουν την κλίση της πειραματικής ευθείας, αλλά την μετατοπίζουν μόνο δεξιά-αριστερά (ο όρος  $h_x r_x$ ) ή πάνω-κάτω (ο όρος  $h_y r_y$ ), ανάλογα με το πρόσημό τους. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι όροι αυτοί θα αποβληθούν τελικά από τη σχέση που ορίζει το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση.

Επίσης, ο γενικός χαρακτήρας των συμπερασμάτων θα διατηρηθεί αν υποθέσουμε θετικό πρόσημο στους 8 όρους των σφαλμάτων, που σε μεγάλο βαθμό θα διευκολύνει τους υπολογισμούς.



Σχήμα 12. Σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα 2 ψηφιακά όργανα.

Για τους υπολογισμούς, θεωρούμε τη γραφική παράσταση που βλέπουμε στο Σχ. 12. Καθώς τα πρόσημα των σφαλμάτων είναι θετικά, στην ευθεία Z-E οι συντεταγμένες του σημείου Z είναι

$$\mathbf{Z}[x_1 + \delta x_1, \quad y_1 + \delta y_1],$$

ενώ οι συντεταγμένες του σημείου E είναι

$$\mathbf{E}[x_n + \delta x_n, \quad y_n + \delta y_n].$$

Σύμφωνα με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η κλίση της οριακής ευθείας Z-E υπολογίζεται από τη σχέση

$$b_{Z-E} = \frac{y_E - y_Z}{x_E - x_Z} = \frac{(y_n + \delta y_n) - (y_1 + \delta y_1)}{(x_n + \delta x_n) - (x_1 + \delta x_1)} = \frac{(y_n + \gamma_y y_n + h_y r_y) - (y_1 + \gamma_y y_1 + h_y r_y)}{(x_n + \gamma_x x_n + h_x r_x) - (x_1 + \gamma_x x_1 + h_x r_x)} =$$

$$\frac{(y_n - y_1) + \gamma_y (y_n - y_1)}{(x_n - x_1) + \gamma_x (x_n - x_1)} = b \frac{1 + \gamma_y}{1 + \gamma_x} \approx b(1 + \gamma_y)(1 - \gamma_x) = b(1 + \gamma_y - \gamma_x - \gamma_y \gamma_x) \approx$$

$$b + b(\gamma_y - \gamma_x) = b + \Delta b$$

όπου αγνοήθηκε το δευτέρας τάξης γινόμενο  $b\gamma_y\gamma_x$ .

Τελικά, για το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση προκύπτει η σχέση

$$\Delta b = b(\gamma_y - \gamma_x). \quad (57)$$

**Σημειώνουμε**, ότι η σχέση (57) μπορεί να αξιοποιηθεί ως έχει, όταν είναι γνωστά τα πρόσημα των ποσοστιαίων σφαλμάτων  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ .

Συνήθως, οι κατασκευάστριες εταιρείες των οργάνων δεν αναφέρουν το πρόσημο του ποσοστιαίου σφάλματος, δηλώνοντας μόνο την αριθμητική του τιμή.

Στην περίπτωση αυτή, η σχέση (57) έχει τη μέγιστη τιμή και αποκτά οριακό και εγγυημένο χαρακτήρα, όταν στην παρένθεση προσθέτουμε τα μέτρα των ποσοστιαίων σφαλμάτων  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ :

$$\Delta b = b(|\gamma_y| + |\gamma_x|), \quad (58)$$

δηλαδή στον υπολογισμό του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος στην κλίση λαμβάνονται υπόψη μόνο οι αριθμητικές τιμές των ποσοστιαίων σφαλμάτων  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ , που δηλώνουν οι εταιρείες.

Αλλά ας επιστρέψουμε στη σχέση (57). Από τη σχέση αυτή προκύπτει το ενδιαφέρον συμπέρασμα, ότι όταν τηρείται ο όρος

$$\gamma_y = \gamma_x,$$

το ποσοστιαίο σφάλμα στην κλίση είναι μηδέν (!), δηλαδή τα ποσοστιαία σφάλματα των 2 οργάνων δεν συμβάλουν στο σφάλμα της κλίσης.

Αυτή η κατάσταση είναι αναμενόμενη, καθώς όταν τηρείται ο όρος  $\gamma_y = \gamma_x$ , στους νέους άξονες με νέες κλίμακες, δηλαδή ποσοστιαία αυξημένες κατά  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ , η κλίση της ευθείας παραμένει ίδια, όταν οι επιμηκύνσεις των δύο αξόνων είναι ίδιες!

Αντίθετα, όταν οι επιμηκύνσεις των δύο αξόνων είναι ίδιες αριθμητικά, *αλλά με αντίθετα πρόσημα*, δηλαδή όταν τηρείται ο όρος

$$\gamma_y = -\gamma_x$$

και, επίσης,

$$|\gamma_y| = |\gamma_x| = \gamma,$$

(ο άξονας  $y$  επιμηκώνεται ποσοστιαία κατά  $\gamma_y$ , ενώ ο άξονας  $x$  συστέλλεται ποσοστιαία κατά  $\gamma_x$ ), η μεταβολή στην κλίση της πειραματικής ευθείας γίνεται μέγιστη και είναι:

$$\Delta b = 2b\gamma.$$

Τέλος, εξετάζοντας τη σχέση (57) διαπιστώνουμε, ότι είναι απαλλαγμένη από τους σταθερούς όρους  $h_x r_x$  και  $h_y r_y$ , γεγονός που είναι αναμενόμενο, καθώς στις δύο σειρές μετρήσεων  $x_i$  και  $y_i$ , οι όροι αυτοί κατά ίδιο μέγεθος επηρεάζουν (αλλοιώνουν) όλες τις τιμές, προκαλώντας τελικά μόνο παράλληλη μετατόπιση της πειραματικής ευθείας: δεξιά-αριστερά, μέσω του όρου  $h_x r_x$  ή, πάνω-κάτω, μέσω του όρου  $h_y r_y$ , ανάλογα με το πρόσημό τους.

#### 12.9.4. $\Delta a_{οργ}$ σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές ( $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ )

Για λόγους πληρότητας, στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε και τη συνεισφορά των σφαλμάτων των 2 ψηφιακών οργάνων στο σφάλμα του ελεύθερου όρου  $a$ , της πειραματικής ευθείας

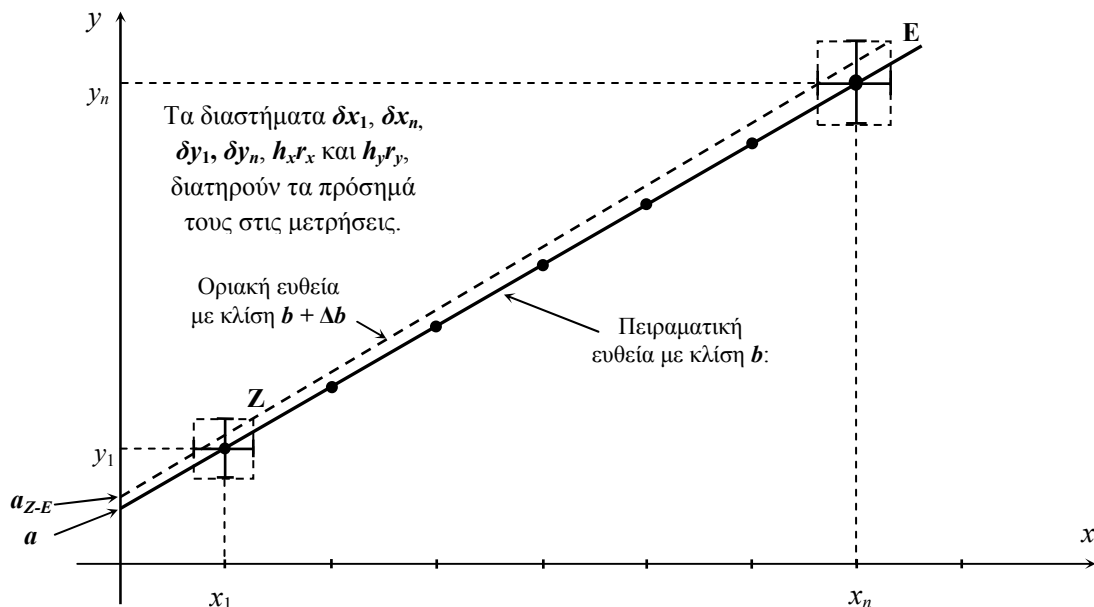
$$y = a + bx.$$

Στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε, ότι οι όροι  $h_x r_x$  και  $h_y r_y$  των 2 ψηφιακών οργάνων δεν επηρεάζουν την κλίση της πειραματικής ευθείας, ωστόσο άμεσα επηρεάζουν το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον άξονα των  $y$ , δηλαδή την τιμή του ελεύθερου όρου  $a$ , συμβάλλοντας έτσι στο σφάλμα του  $\Delta a_{οργ}$ .

Έτσι, ο όρος  $h_y r_y$ , το σημείο τομής το μετατοπίζει κατά  $h_y r_y$ , ενώ ο όρος  $h_x r_x$ , το μετατοπίζει κατά  $-bh_x r_x$  κ.ο.κ. Αλλά και η μεταβολή της κλίσης της πειραματικής ευθείας, κατά  $\Delta b$ , προκαλεί πρόσθετη μεταβολή του σημείου τομής, συμβάλλοντας με νέο όρο στο σφάλμα του  $\Delta a_{οργ}$ .

Για να υπολογίσουμε τη συμβολή των όρων  $h_y r_y$ ,  $h_x r_x$ ,  $b$  και  $\Delta b$  στο σφάλμα  $\Delta a_{οργ}$  – θα καταφύγουμε στο Σχ. 13, υπολογίζοντας το σημείο τομής,  $a_{Z-E}$ , της οριακής ευθείας Z-E με τον άξονα των  $y_i$ . Στη συνέχεια, τον όρο  $\Delta a_{οργ}$  θα τον υπολογίσουμε ως διαφοροποίηση του σημείου  $a_{Z-E}$  από το σημείο  $a$ :

$$\Delta a_{οργ} = a_{Z-E} - a.$$



Σχήμα 13. Σημείο τομής της ευθείας Z-E με τον άξονα των  $y_i$ .

Καταρχάς, το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον άξονα των  $y$ ; υπολογίζεται από τη σχέση

$$a = \frac{y_n + y_1}{2} - b \frac{(x_n + x_1)}{2},$$

ενώ το σημείο τομής της ευθείας Z-E με τον άξονα των  $y$ ; εξαρτάται από τις συντεταγμένες των σημείων Z και E:

$$\mathbf{Z}[x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1],$$

$$\mathbf{E}[x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n].$$

Το σημείο τομής της ευθείας Z-E με τον άξονα των  $y$ ; υπολογίζεται από τη σχέση

$$a_{Z-E} = \frac{y_E + y_Z}{2} - (b + \delta b) \frac{(x_E + x_Z)}{2} = \frac{y_n + \delta y_n + y_1 + \delta y_1}{2} - (b + \Delta b) \frac{(x_n + \delta x_n + x_1 + \delta x_1)}{2} =$$

$$\frac{y_n + \gamma_y y_n + h_y r_y + y_1 + \gamma_y y_1 + h_y r_y}{2} - (b + \Delta b) \frac{(x_n + \gamma_x x_n + h_x r_x + x_1 + \gamma_x x_1 + h_x r_x)}{2} =$$

$$\frac{y_n + y_1}{2} - b \frac{(x_n + x_1)}{2} + \frac{\gamma_y (y_n + y_1) + 2h_y r_y}{2} - b \frac{\gamma_x (x_n + x_1) + 2h_x r_x}{2} - \frac{\Delta b (x_n + x_1)}{2} =$$

$$a + h_y r_y - b h_x r_x + \frac{\gamma_y (y_n + y_1)}{2} - b \frac{\gamma_x (x_n + x_1)}{2} - \frac{\Delta b (x_n + x_1)}{2} = a + \Delta a,$$

όπου αγνοήθηκαν τα δευτέρας τάξης γινόμενα  $\gamma_x \times x_n \times \Delta b$ ,  $\gamma_x \times x_1 \times \Delta b$ ,  $h_x r_x \times \Delta b$  και  $h_y r_y \times \Delta b$ , ενώ το σφάλμα στην κλίση  $\Delta b$  ορίζεται από τη σχέση (58).

Για το σφάλμα  $\Delta a$  του ελευθέρου όρου  $a$  προκύπτει η σχέση:

$$\Delta a = h_y r_y - b h_x r_x + \frac{\gamma_y (y_n + y_1)}{2} - b \frac{\gamma_x (x_n + x_1)}{2} - \frac{\Delta b (x_n + x_1)}{2} =$$

$$h_y r_y - b h_x r_x + \gamma_y \bar{y} - \gamma_x b \bar{x} - \Delta b \bar{x},$$

Τελικά,

$$\Delta a = h_y r_y - b h_x r_x + \gamma_y \bar{y} - \gamma_x b \bar{x} - \Delta b \bar{x}, \quad (59)$$

όπου

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$

και

$$\Delta b = b(\gamma_y + \gamma_x).$$

Η σχέση (59) μπορεί να αξιοποιηθεί ως έχει όταν είναι γνωστά τα πρόσημα των σφαλμάτων  $\gamma_y$ ,  $\gamma_x$ ,  $h_y r_y$  και  $h_x r_x$ .

Συνήθως, οι κατασκευάστριες εταιρείες των οργάνων δεν αναφέρουν τα πρόσημα των σφαλμάτων, δηλώνοντας μόνο τις αριθμητικές τους τιμές.

Στην περίπτωση αυτή, η σχέση (59) έχει τη μέγιστη τιμή και αποκτά οριακό και εγγυημένο χαρακτήρα όταν στη σχέση λαμβάνονται υπόψη μόνο οι αριθμητικές τιμές των σφαλμάτων  $\gamma_y$ ,  $\gamma_x$ ,  $h_y r_y$  και  $h_x r_x$ :

$$\Delta a_{op\gamma} = \Delta a = h_y r_y + b h_x r_x + \frac{\gamma_y (y_n + y_1)}{2} + b \frac{\gamma_x (x_n + x_1)}{2} + \frac{\Delta b (x_n + x_1)}{2} =$$

$$h_y r_y + b h_x r_x + \gamma_y \bar{y} + b \gamma_x \bar{x} + \Delta b \bar{x}.$$

Τελικά,

$$\Delta a_{op\gamma} = h_y r_y + b h_x r_x + \gamma_y \bar{y} + b \gamma_x \bar{x} + \Delta b \bar{x}. \quad (60)$$

Από τις σχέσεις (59) και (60) προκύπτει το συμπέρασμα, ότι στο σφάλμα του ελευθέρου όρου  $a$  συμβάλουν:

η κλίση  $b$ ,

το σφάλμα της κλίσης  $\Delta b$ , αλλά και όλοι οι όροι των σφαλμάτων των 2 οργάνων:

(α) το ποσοστιαίο σφάλμα  $\gamma_y$ ,

(β) το ποσοστιαίο σφάλμα  $\gamma_x$ ,

(γ) ο σταθερός όρος  $h_y r_y$ ,

(δ) ο σταθερός όρος  $h_x r_x$ ,

κάνοντάς έτσι το σφάλμα  $\Delta a_{op\gamma}$  εξαρτώμενο από 6 παράγοντες, που το διογκώνουν τελικά σε μεγάλο βαθμό.

Συγκρίνοντας τα 2 εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων: δηλαδή τα  $\Delta b_{op\gamma}$  και  $\Delta a_{op\gamma}$ :

$$\Delta b_{op\gamma} = b(\gamma_y + \gamma_x),$$

και

$$\Delta a_{op\gamma} = \Delta a = h_y r_y + b h_x r_x + \gamma_y \bar{y} + b \gamma_x \bar{x} + \Delta b \bar{x},$$

διαπιστώνουμε τελικά, ότι στο σφάλμα της κλίσης συμβάλουν μόνο οι δύο ποσοστιαίοι όροι  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ , ενώ στο σφάλμα του ελευθέρου όρου  $a$  συμβάλουν όλα τα σφάλματα των 2 ψηφιακών οργάνων. Αυτός είναι ο λόγος, για τον οποίο το ενδιαφερόμενο φυσικό μέγεθος προτιμάται να υπολογίζεται μέσω μέτρησης της κλίσης της πειραματικής ευθείας και όχι μέσω του ελευθέρου όρου  $a$ , το σφάλμα του οποίου είναι ευάλωτο σε όλα τα σφάλματα των 2 οργάνων, αλλά εξαρτάται ακόμη και από την κλίση  $b$ , όπως και του σφάλματός της  $\Delta b$ .

### 12.9.5. Ολικό «σφάλμα» της κλίσης $b$ σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε την περίπτωση μηδενικής διασποράς των πειραματικών σημείων.

Έστω ότι τώρα στις μετρήσεις των τιμών  $y_i$  παρατηρείται τυχαία διασπορά ( $\sigma_y \neq 0$ ), ενώ στις τιμές των  $x_i$  η διασπορά παραμένει μηδενική ( $\sigma_x = 0$ ). Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα της κλίσης επιβαρύνεται και με την αβεβαιότητά της, σύμφωνα με τη βασική αρχή της Μετρολογίας:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{op\gamma} + \Delta b_{τυχ} \quad P \geq 99,7 \%$$

Για τον υπολογισμό του ολικού σφάλματος, οι όροι  $\Delta b_{op\gamma}$  και  $\Delta b_{τυχ}$  πρέπει να προστεθούν. Ωστόσο για να είναι η πρόσθεσή τους δυνατή, ο όρος  $\Delta b_{τυχ}$  πρέπει να αποκτήσει πιθανότητα κάλυψης 99,7 %, που επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό της τυπικής απόκλισης ( $\sigma_y$ ) στον κατάλληλο συντελεστή Student.

Όταν στις τιμές των  $y_i$  παρατηρείται διασπορά, η κλίση της πειραματικής ευθείας υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή όχι από τη σχέση

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1},$$

παρότι ο υπολογιστικός της όγκος είναι πολύ μικρότερος.

Σε μετρήσεις με μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ) και μη μηδενική διασπορά των  $y_i$  ( $\sigma_y \neq 0$ ), η κλίση  $B$  της πραγματικής ευθείας, όπως και το σφάλμα της, σημειώνεται ως:

$$B = b \pm \Delta b_{ολ},$$

όπου το  $b$  παριστάνει την κλίση της πρώτης (του μοντέλου) βέλτιστης πειραματικής ευθείας (Σχ.9), η κλίση της οποίας υπολογίζεται από τη σχέση

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

ενώ το ολικό σφάλμα στην κλίση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b(\gamma_y + \gamma_x) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad P \geq 99,7 \%, \quad (61)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

### 12.9.5.1. Ολικό σφάλμα του ελεύθερου όρου $a$ σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές

Σε συνθήκες όπου  $\sigma_y \neq 0$ , στον όρο  $\Delta a_{οργ}$  που υπολογίσαμε προηγουμένως πρέπει να προστεθεί και η αβεβαιότητά του, που προκαλείται από τη διασπορά των τιμών  $y_i$ .

Έτσι, σύμφωνα με τη βασική αρχή της Μετρολογίας:

$$\Delta a_{ολικο} = \Delta a_{οργ} + \Delta a_{τυχ}, \quad P \geq 99,7 \%.$$

Τελικά, όταν στις τιμές των  $y_i$  παρατηρείται διασπορά, ο ελεύθερος όρος της πειραματικής ευθείας υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ στην αβεβαιότητα του «μέσου  $a$ » ( $\Delta a_{τυχ}$ ) προστίθεται και η συνιστώσα του σφάλματος που προκαλούν τα σφάλματα των 2 οργάνων:

$$a = \frac{(\sum y_i) \times (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \times (\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

και

$$\Delta a_{ολικο} = \Delta a_{οργ} + \Delta a_{τυχ} = \Delta a_{οργ} + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad P \geq 99,7 \%. \quad (62)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

Στη σχέση (62), ο όρος  $\Delta a_{οργ}$  υπολογίζεται από τη σχέση (60) και είναι

$$\Delta a_{οργ} = h_y r_y + b h_x r_x + \gamma_y \bar{y} + b \gamma_x \bar{x} + \Delta b \bar{x},$$

ο όρος  $\Delta b$  είναι

$$\Delta b = b(\gamma_y + \gamma_x),$$

ενώ η τιμή της  $b$  υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και είναι:

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

### 12.9.6. $\Delta b_{οργ}$ σε μετρήσεις με δύο αναλογικούς μετρητές.

Στα αναλογικά όργανα το εγγυημένο διάστημα σφάλματος που δηλώνεται από την κατασκευάστρια εταιρεία είναι ένας σταθερός αριθμός, με άγνωστη τιμή κα πρόσημο, όμοιος με τον όρο  $hr$  των ψηφιακών οργάνων. Συνήθως, ο σταθερός αυτός όρος ταυτίζεται με την τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου:

$$\psi = \varepsilon_{\kappa\nu\rho} + \varepsilon_{\alpha\nu}$$

ωστόσο επεκτείνεται σε όλη την κλίμακά του, γεγονός που οδηγεί σε απώλεια ακρίβειας στις μικρές τιμές.

Στα αναλογικά όργανα δεν δηλώνεται το ποσοστιαίο σφάλμα του μετρητή. Είναι όμως λάθος να πούμε, ότι οι δύο σταθεροί όροι των σφαλμάτων,  $\psi_x$  και  $\psi_y$ , (ελάχιστες υποδιαίρέσεις στις κλίμακες των 2 οργάνων) δε συμβάλουν στο σφάλμα της κλίσης της πειραματικής ευθείας.

Στις σειρές που ακολουθούν θα δούμε ποια σφάλματα των οργάνων επηρεάζουν την κλίση της πειραματικής ευθείας, αλλά και πώς. Θα δούμε επίσης και ποια σφάλματα δεν την επηρεάζουν.

Έστω ότι τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των μετρητών  $x_i$  και  $y_i$  δίνονται σε μορφή:

$$\text{Accuracy (x): } \delta x = \delta x_{\kappa\nu\rho} + \delta x_{\alpha\nu} = \psi_x/2 + \psi_x/2 = \psi_x$$

και

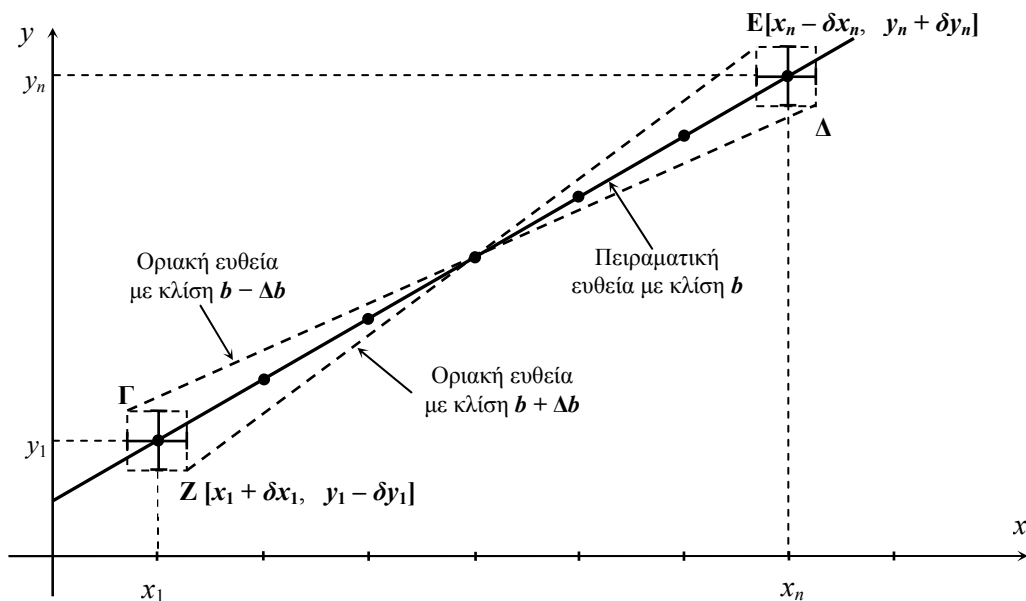
$$\text{Accuracy (y): } \delta y = \delta y_{\kappa\nu\rho} + \delta y_{\alpha\nu} = \psi_y/2 + \psi_y/2 = \psi_y.$$

Συνήθως, η μετρητική διαδικασία περιλαμβάνει μέτρηση των τιμών  $y_i$  σε επιλεγμένες τιμές των  $x_i$ . Καθώς, όμως, οι τιμές των  $x_i$  επιλέγονται εκ' των προτέρων, καταβάλλεται προσπάθεια στις τιμές των  $x_i$  το σφάλμα ανάγνωσης να είναι «μηδέν», δηλαδή ο δείκτης του οργάνου να βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς» (αστοχία ρύθμισης της βελόνας μικρότερη από το μισό πάχος της χαρακιάς, που είναι 1/5 της  $\psi$ ). Παρά ταύτα, στην ανάλυση που ακολουθεί, στους υπολογισμούς θα συμπεριλάβουμε και το σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού μετρητή των  $x_i$ .

Θυμίζουμε, ότι καθώς η ανάλυση γίνεται σε προσέγγιση μηδενικής διασποράς των πειραματικών τιμών  $x_i$  και  $y_i$ , για να υπολογίσουμε την κλίση της πειραματικής ευθείας, όπως και του σφάλματός της, αρκούν μόνο τα δύο οριακά πειραματικά σημεία που βλέπουμε στο Σχ. 14: δηλαδή τα σημεία  $[x_1, y_1]$  και  $[x_n, y_n]$ .

Από τη σκοπιά αυτή, και εδώ, η κλίση της πειραματικής ευθείας είναι

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}.$$



Σχήμα 14. Υπολογισμός του  $\Delta b_{\text{οργ}}$  σε μετρήσεις με 2 αναλογικά όργανα ( $\sigma_y = 0$ ).

Σκοπός της ανάλυσης είναι να κατασκευαστούν και να υπολογιστούν δύο οριακές ευθείες (Z-E και Γ-Δ, Σχ. 14), εντός των οποίων με σιγουριά βρίσκεται η ευθεία η πραγματική. Ωστόσο, για να είναι οι ευθείες αυτές οριακές, τα σφάλματα των πειραματικών σημείων πρέπει στο μέγιστο βαθμό να τις διαφοροποιούν από την ευθεία την πειραματική. Η διαφοροποίηση αυτή λαμβάνει χώρα όταν στις τιμές των  $x_1, x_n$  και  $y_1, y_n$ , σημειώνονται τα οριακά τους σφάλματα, αλλά και τα πρόσημά τους επιλέγονται κατάλληλα.

Όπως και στα ψηφιακά όργανα, για τον υπολογισμό του σφάλματος στην κλίση αρκεί η κατασκευή της ευθείας με τη μέγιστη δυνατή κλίση, δηλαδή της ευθείας Z-E, ενώ είναι περιττή η κατασκευή της ευθείας με την ελάχιστη δυνατή κλίση, δηλαδή της ευθείας Γ-Δ.

Έστω ότι τα οριακά σφάλματα των τιμών  $x_1, x_n$  και  $y_1, y_n$  είναι  $\delta x_1, \delta x_n$ , και  $\delta y_1, \delta y_n$ , αντίστοιχα, όπου

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= \delta x_{1-κνρ} + \delta x_{1-av}, \\ \delta x_n &= \delta x_{n-κνρ} + \delta x_{n-av}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= \delta y_{1-κνρ} + \delta y_{1-av}, \\ \delta y_n &= \delta y_{n-κνρ} + \delta y_{n-av}.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι όταν οι μετρήσεις γίνονται στις ίδιες κλίμακες, στα 2 πειραματικά σημεία τα κύρια σφάλματα των οργάνων έχουν ίδια τιμή και πρόσημο, γεγονός που επιτρέπει την απάλειψή τους, αλλά και τα σφάλματα ανάγνωσης, κατά μέτρο, έχουν ίδια τιμή:

$$\begin{aligned}|\delta y_{n-av}| &= |\delta y_{1-av}| \\ |\delta x_{n-av}| &= |\delta x_{1-av}|.\end{aligned}$$

Καθώς, όμως, το σφάλμα ανάγνωσης συνοδεύεται με το σύμβολο  $\pm$ , που σημαίνει ότι το πρόσημό του μπορεί να είναι  $+$ , αλλά μπορεί να είναι και  $-$ , η κλίση της ευθείας Z-E διαφοροποιείται στο μέγιστο βαθμό από την ευθεία την πειραματική και αποκτά εγγυημένο χαρακτήρα, όταν στο σφάλμα  $\delta y_{n-av}$  προσδίδεται πρόσημο θετικό, ενώ στο σφάλμα  $\delta y_{1-av}$  προσδίδεται πρόσημο αρνητικό:

$$\delta y_{n-av} > 0$$

$$\delta y_{1-av} < 0.$$

Αντίστοιχα, στο σφάλμα  $\delta x_{n-av}$  προσδίδεται πρόσημο αρνητικό, ενώ στο σφάλμα  $\delta x_{1-av}$  προσδίδεται πρόσημο θετικό (βλ. Σχ. 14):

$$\delta x_{n-av} < 0$$

$$\delta x_{1-av} > 0,$$

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η κλίση της οριακής ευθείας Z-E υπολογίζεται από τη σχέση

$$b_{Z-E} = \frac{y_E - y_Z}{x_E - x_Z} = \frac{(y_n + \delta y_{n-κνρ} + \delta y_{n-av}) - (y_1 + \delta y_{1-κνρ} - \delta y_{1-av})}{(x_n + \delta x_{n-κνρ} - \delta x_{n-av}) - (x_1 + \delta x_{1-κνρ} + \delta x_{1-av})} = \frac{(y_n - y_1) + (\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(x_n - x_1) - (\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})} =$$

$$\frac{b + \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{(x_n - x_1)}}{1 - \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)}} \approx \left( b + \frac{b(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} \right) \left( 1 + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right) \approx$$

$$b + b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right) = b + \Delta b,$$

όπου,

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}.$$

και

$$\Delta b_{οργγ} = b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} - \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right).$$

Στην παραπάνω σχέση αξιοποιήθηκαν οι 2 πρώτοι όροι της σειράς Teilor:

$$\frac{1}{1-h} \approx 1+h, \quad (h \ll 1).$$

και αγνοήθηκε ο δευτέρας τάξης όρος:

$$b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} \times \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right).$$

Τελικά, η σχέση για το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση που προκαλούν τα 2 όργανα είναι:

$$\Delta b_{οργγ} = b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right).$$

Σε όμοια σχέση θα καταλήξουμε αν εξετάσουμε την οριακή ευθεία Γ-Δ, ωστόσο αυτή θα προκύψει με αρνητικό πρόσημο της όλης παράστασης, γεγονός που μας επιτρέπει στη σχέση για το σφάλμα να προσθέσουμε το σύμβολο  $\pm$ :

$$\Delta b_{οργγ} = \pm b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right). \quad (63)$$

Θυμίζουμε, ότι όταν οι μετρήσεις γίνονται στις ίδιες κλίμακες, στα 2 πειραματικά σημεία τα σφάλματα ανάγνωσης, κατά μέτρο, έχουν ίδια τιμή ( $\delta y_{n-av} = \delta y_{1-av}$ ,  $\delta x_{n-av} = \delta x_{1-av}$ ) γεγονός που επιτρέπει η σχέση (63) να σημειωθεί ως:

$$\Delta b_{οργγ} = \pm b \left( \frac{2\delta y_{av}}{(y_n - y_1)} + \frac{2\delta x_{av}}{(x_n - x_1)} \right) = \pm b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{\psi_x}{(x_n - x_1)} \right).$$

Τελικά, για το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση προκύπτει η σχέση

$$\Delta b_{οργγ} = \pm b \left( \frac{2\delta y_{av}}{(y_n - y_1)} + \frac{2\delta x_{av}}{(x_n - x_1)} \right) = \pm b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{\psi_x}{(x_n - x_1)} \right). \quad (64)$$

Σε μετρήσεις όμως όπου η μέτρηση της  $x_1$  έγινε σε μία κλίμακα, ενώ της  $x_n$  σε άλλη, με διαφορετική τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης ( $\delta x_{n-av} \neq \delta x_{1-av}$ ), ο υπολογισμός του σφάλματος πρέπει να γίνεται από τη σχέση (63), που είναι πιο γενική.

Η σχέση (63) παραμένει ως έχει και σε έμμεσες μετρήσεις όπου τα μεγέθη  $x$  και  $y$  δεν είναι μετρημένα άμεσα, αλλά είναι παραγόμενα από άλλα, που μετρήθηκαν άμεσα.

Για παράδειγμα

$$x = R^2$$

και

$$y = \frac{T^2}{4\pi}.$$

Στα μεγέθη  $x$  και  $y$ , τα αντίστοιχα σφάλματα είναι

$$\delta x_1 = 2R_1 \delta R$$

$$\delta x_n = 2R_n \delta R$$

και

$$\delta y_1 = \frac{2T_1 \delta T}{4\pi}$$

$$\delta y_n = \frac{2T_n \delta T}{4\pi},$$

όπου  $\delta x_1 \neq \delta x_n$  και  $\delta y_1 \neq \delta y_n$ .

Ακόμη, από τη σχέση (64) προκύπτει το συμπέρασμα ότι το  $\Delta b_{οργ}$  είναι ελάχιστο όταν αξιοποιούνται οι κλίμακες των οργάνων στο μέγιστο δυνατό βαθμό, δηλαδή όταν οι 2 παρανομαστές έχουν τιμή κοντά στο  $Z_{max}$ :

$$y_n \approx Z_{y-max}$$

$$y_1 \approx 0$$

και, επίσης:

$$x_n \approx Z_{x-max}$$

$$x_1 \approx 0.$$

Συμπεραίνουμε ακόμη, ότι όταν οι άμεσες μετρήσεις γίνονται στην ίδια κλίμακα, το σφάλμα  $\Delta b_{οργ}$  είναι απαλλαγμένο από τα κύρια σφάλματα των 2 οργάνων, που συνιστά πλεονέκτημα της εφαρμοζόμενης μεθόδου.

**Σημείωση.** Σε πειράματα όπου στις τιμές των  $x_i$  ο δείκτης του αναλογικού οργάνου ρυθμίζεται να βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς», μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη προσέγγιση:

$$\delta x_{av} = 0,5 \text{ πάχους της χαρακιάς},$$

Στα αναλογικά όργανα, συνήθως, το πάχος της χαρακιάς είναι  $\psi/5$ . Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει, στις τιμές των  $x_i$ , να ορίσουμε ως άνω όριο του σφάλματος ανάγνωσης το γινόμενο

$$\frac{1}{2} \times \frac{\psi_x}{5} = 0,1\psi_x$$

(προσέγγιση  $\delta x_{av} = 0,1\psi_x$ ).

Στην προσέγγιση αυτή, η σχέση (64) σημειώνεται ως:

$$\Delta b_{οργ} = \Delta b = \pm b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{0,2\psi_x}{(x_n - x_1)} \right). \quad (65)$$

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να σημειώσουμε ότι σε άμεσες μετρήσεις, στην ίδια κλίμακα, όταν γίνεται χρήση 2 αναλογικών οργάνων, όπου στις μετρήσεις των τιμών  $x_i$  το σφάλμα ανάγνωσης σημειώνεται ως

$$\delta x_{av} = \pm 0,1\psi_x,$$

για τις τιμές  $b$ ,  $a$  και  $\Delta b_{οργ}$ , προκύπτουν οι σχέσεις:

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1},$$

$$a = \frac{y_n + y_1}{2} - b \frac{(x_n + x_1)}{2}$$

και

$$\Delta b_{\text{οργ}} = \pm b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{0,2\psi_x}{(x_n - x_1)} \right).$$

### 12.9.6.1. Δα<sub>οργ</sub> σε μετρήσεις με δύο αναλογικά όργανα

Για λόγους πληρότητας, θα υπολογίσουμε και τον όρο Δα<sub>οργ</sub>.

Συνήθως, το ενδιαφερόμενο φυσικό μέγεθος, όπως και το σφάλμα του, υπολογίζεται από την κλίση της πειραματικής ευθείας

$$y = a + bx,$$

καθώς ο ελεύθερος όρος **a** είναι ευάλωτος ακόμη και στα κύρια σφάλματα των δύο αναλογικών οργάνων.

Για παράδειγμα, η μεταβολή όλων των τιμών  $y_i$  κατά  $\delta y_{\text{κνρ}}$ , προς τις θετικές τιμές, δηλαδή όταν  $\delta y_{\text{κνρ}} > 0$ , προκαλεί παράλληλη μετατόπιση της πειραματικής ευθείας κατά  $\delta y_{\text{κνρ}}$  και, επομένως, το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των  $y_i$  μετατοπίζεται προς τις θετικές τιμές επίσης κατά  $\delta y_{\text{κνρ}}$ . Συνεπώς, το σφάλμα  $\delta y_{\text{κνρ}}$  προκαλεί σφάλμα στο **a**, κατά Δα<sub>1</sub>, όπου

$$\Delta a_1 = \delta y_{\text{κνρ}}.$$

Επίσης, το κύριο σφάλμα του μετρητή των  $x_i$ , δηλαδή το  $\delta x_{\text{κνρ}}$ , όταν είναι ένας θετικός και σταθερός αριθμός ( $\delta x_{\text{κνρ}} > 0$ ) προκαλεί παράλληλη μετατόπιση της πειραματικής ευθείας προς τις θετικές τιμές των  $x_i$ , ενώ το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον άξονα των  $y_i$  μετατοπίζεται προς τις αρνητικές τιμές κατά  $-b\delta x_{\text{κνρ}}$ :

$$\Delta a_2 = -b\delta x_{\text{κνρ}}.$$

Με όμοιους συλλογισμούς θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μεταβολή της κλίσης της πειραματικής ευθείας κατά Δ**b** προκαλεί μετατόπιση του σημείου τομής κατά Δα<sub>3</sub>, όπου

$$\Delta a_3 = -\Delta b(x_n + x_1)/2$$

κ.ο.κ.

Βλέπουμε, ότι και στα αναλογικά όργανα, το σφάλμα στο **a** είναι ευάλωτο στο σύνολο των σφαλμάτων των 2 οργάνων. Το γεγονός αυτό κάνει ασύμφορο τον υπολογισμό του ενδιαφερόμενου φυσικού μεγέθους μέσω του ελεύθερου όρου **a**. Ωστόσο για λόγους πληρότητας, στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε και το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στον ελεύθερο όρο **a**. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το Σχ. 15.

Οι σχετικοί υπολογισμοί του σφάλματος Δα<sub>οργ</sub> θα γίνουν με τους όρους που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπου υπολογίσαμε το σφάλμα στην κλίση Δb<sub>οργ</sub>.

Με τους όρους αυτούς, η πειραματική ευθεία τέμνει τον άξονα **y** στο σημείο **a**, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$a = \frac{y_n + y_1}{2} - b \frac{(x_n + x_1)}{2},$$

ενώ η οριακή ευθεία Z-E τέμνει τον άξονα **y** στο σημείο **a<sub>Z-E</sub>**, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$a_{Z-E} = \frac{y_E + y_Z}{2} - b \frac{(x_E + x_Z)}{2},$$

όπου λαμβάνονται υπόψη τα σφάλματα των 2 οργάνων. Οι συντεταγμένες των σημείων **Z** και **E** είναι:

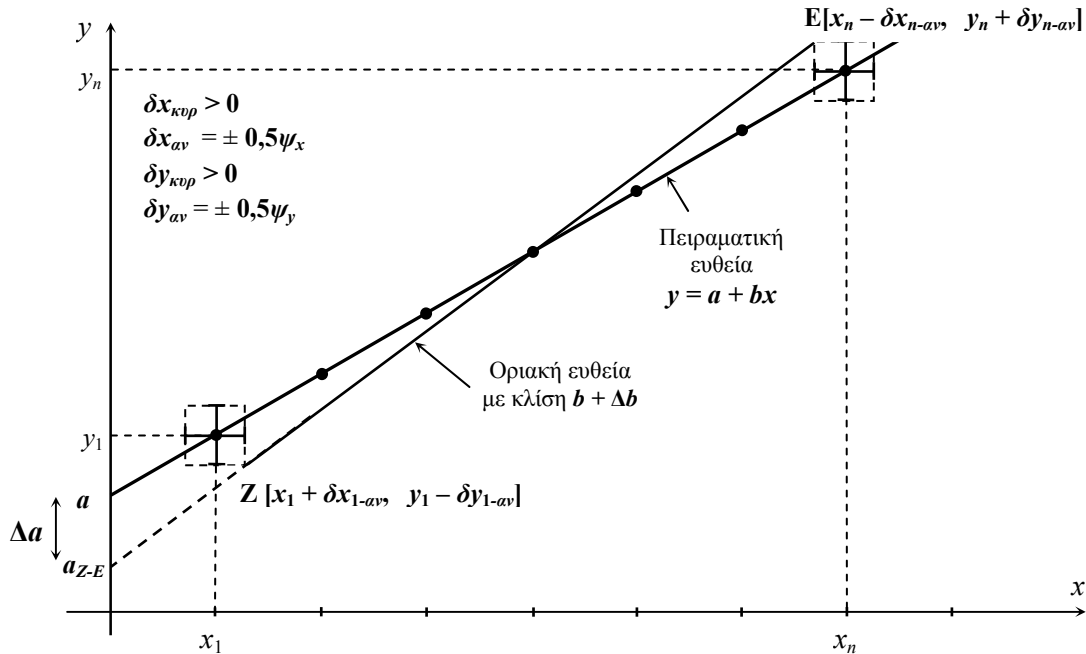
$$Z [x_1 + \delta x_{\text{κνρ}} + \delta x_{1-\text{αν}}, \quad y_1 + \delta y_{\text{κνρ}} - \delta y_{1-\text{αν}}]$$

και

$$E[x_n + \delta x_{\kappa\rho\rho} - \delta x_{n-av}, \quad y_n + \delta y_{\kappa\rho\rho} + \delta y_{n-av}].$$

Έστω ότι οι μετρήσεις των  $x_i$  και  $y_i$  έγιναν στην ίδια κλίμακα. Όπως και στον υπολογισμό του σφάλματος στην κλίση, το σφάλμα  $\Delta a_{οργ}$  θα το υπολογίσουμε ως διαφορά των όρων  $a$  και  $a_{Z-E}$ :

$$\Delta a_{οργ} = a_{\pi} - a_{Z-E}.$$



Σχήμα 15. Υπολογισμός του  $\Delta a_{οργ}$  σε μετρήσεις με 2 αναλογικά όργανα ( $\sigma_y = 0$ ).

Αναλυτικότερα, η οριακή ευθεία Z-E τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $a_{Z-E}$ , το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$a_{Z-E} = \frac{y_E + y_Z}{2} - (b + \Delta b) \frac{(x_E + x_Z)}{2} = \frac{y_n + y_1 + 2\delta y_{\kappa\rho\rho}}{2} - (b + \Delta b) \frac{x_n + x_1 + 2\delta x_{\kappa\rho\rho}}{2} =$$

$$\frac{y_n + y_1}{2} - b \frac{(x_n + x_1)}{2} + \delta y_{\kappa\rho\rho} - b \times \delta x_{\kappa\rho\rho} - \Delta b \frac{(x_n + x_1)}{2} - \Delta b \times \delta x_{\kappa\rho\rho} \approx$$

$$a + \delta y_{\kappa\rho\rho} - b \times \delta x_{\kappa\rho\rho} - \Delta b \frac{(x_n + x_1)}{2} = a + \Delta a,$$

όπου αγνοήθηκε ο δευτέρας τάξης όρος  $\Delta b \times \delta x_{\kappa\rho\rho}$ . Με την αγνόηση αυτή, ο όρος  $\Delta a$  γίνεται:

$$\Delta a = \delta y_{\kappa\rho\rho} - b \times \delta x_{\kappa\rho\rho} - \Delta b \frac{(x_n + x_1)}{2} = \frac{\psi_y}{2} - b \frac{\psi_x}{2} - \Delta b \frac{(x_n + x_1)}{2}.$$

Τελικά, για το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στον ελεύθερο όρο  $a$  προκύπτει η σχέση

$$\Delta a = \delta y_{\kappa\rho\rho} + b \times \delta x_{\kappa\rho\rho} + \Delta b \frac{(x_n + x_1)}{2} = \frac{\psi_y}{2} + b \frac{\psi_x}{2} + \Delta b \frac{(x_n + x_1)}{2},$$

όπου

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$

και

$$\Delta b = b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{\psi_x}{(x_n - x_1)} \right).$$

Το σφάλμα  $\Delta b$  μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση

$$\Delta b = b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{0,2\psi_x}{(x_n - x_1)} \right),$$

όπου στις μετρήσεις των  $x_i$  το σφάλμα ανάγνωσης σημειώνεται ως:

$$\delta x_{av} = \pm 0,1\psi_x.$$

### 12.9.6.2. Ολικό σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με δύο αναλογικά όργανα

Έστω ότι οι άμεσες μετρήσεις των  $x_i$  και  $y_i$  έγιναν στις ίδιες κλίμακες.

Όταν η διασπορά των πειραματικών σημείων είναι 0, η κλίση της πειραματικής ευθείας μπορεί να υπολογιστεί από τα δύο οριακά πειραματικά σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_n, y_n)$ .

Ωστόσο όταν η διασπορά των πειραματικών σημείων δεν είναι μηδέν, είναι προτιμότερο ο υπολογισμός της κλίσης να γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ στο σφάλμα  $\Delta b_{οργ}$  πρέπει να προστεθεί και η αβεβαιότητά της, δηλαδή ο όρος  $\Delta b_{τυχ}$ :

$$\Delta b_{ολικο} = b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{\psi_x}{(x_n - x_1)} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad P \geq 99,7 \%. \quad (66)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

Σε μετρήσεις των  $x_i$ , όπου ο όρος  $\delta x_{av}$  σημειώνεται ως  $\delta x_{av} = 0,1\psi_x$ , ο παραπάνω τύπος διαφοροποιείται λίγο και παίρνει τη μορφή:

$$\Delta b_{ολικο} = b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} + \frac{2 \times 0,1\psi_x}{(x_n - x_1)} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad P \geq 99,7 \% \quad (67),$$

ενώ σε μετρήσεις όπου ο όρος  $\delta x_{av}$  σημειώνεται ως  $\delta x_{av} = 0$ , οι σχέσεις (63) και (66) απλοποιούνται, ενώ η σχέση (67) αποκτά τη μορφή:

$$\Delta b_{ολικο} = b \left( \frac{\psi_y}{(y_n - y_1)} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}. \quad P \geq 99,7 \%$$

### 12.9.7. Μικτά όργανα. $\Delta b_{οργ}$ σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των $x_i$ και ψηφιακό των $y_i$

Έστω, ότι σε άμεσες μετρήσεις των  $x_i$  και  $y_i$  οι κλίμακες των 2 οργάνων δεν αλλάζουν.

Έστω ακόμη, ότι ο μετρητής των τιμών  $x_i$  είναι αναλογικός, ενώ των  $y_i$  είναι ψηφιακός, δηλαδή τα εγγυημένα σφάλματά τους δίνονται σε μορφή

$$\text{Accuracy (x): } \delta x = \delta x_{κνρ} + \delta x_{av} = \psi_x/2 + \psi_x/2 = \psi_x$$

και

$$\text{Accuracy (y): } \delta y = \gamma_y + h_y r_y,$$

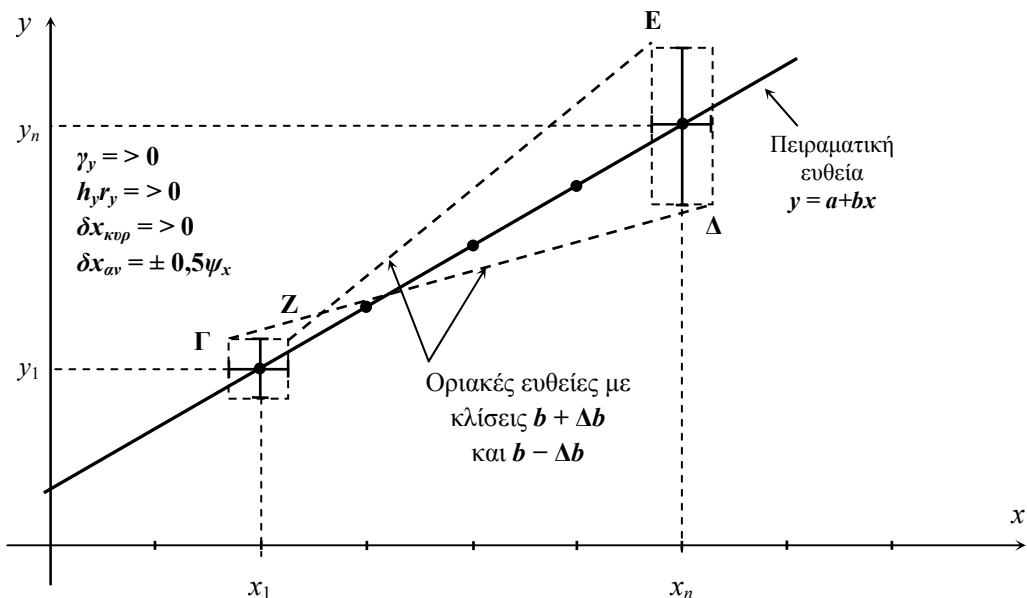
αντίστοιχα.

Στο βαθμό που στις μετρήσεις των τιμών  $y_i$  το ποσοστιαίο σφάλμα  $\gamma_y$  και ο όρος  $h_y r_y$  έχουν σταθερή τιμή και πρόσημο, είναι βολικό, στους υπολογισμούς να υποθέσουμε  $\gamma_y > 0$  και  $h_y r_y > 0$ . Επίσης, είναι βολικό να υποθέσουμε ακόμη, ότι και στις μετρήσεις των  $x_i$ , το κύριο σφάλμα του αναλογικού οργάνου είναι ένας θετικός και σταθερός αριθμός.

Υπό τις συνθήκες αυτές, οι δύο οριακές ευθείες, Z-E και Γ-Δ, με την μέγιστη και ελάχιστη κλίση, χαράσσονται όπως στο Σχ. 16.

Λόγω σφαλμάτων, για να έχει η ευθεία Z-E τη μέγιστη δυνατή κλίση και να αποκτήσει εγγυημένο χαρακτήρα, στο πρώτο πειραματικό σημείο, το σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού οργάνου πρέπει να σημειώνεται με πρόσημο +, ενώ στο n-οστό, με πρόσημο -.

Με συλλογισμούς όπως οι προηγούμενοι, συμπεραίνουμε ότι οι συντεταγμένες των πειραματικών σημείων Z και E είναι:



Σχήμα 16.  $\Delta b_{opγ}$  σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $x_i$  και ψηφιακό των  $y_i$ .

$$Z[x_1 + \delta x_{1-av}, y_1 + \delta y_1] = Z[x_1 + \delta x_{1-κvp} + \delta x_{1-av}, y_1 + y_1 \gamma_y + h_y r_y]$$

και

$$E[x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n] = E[x_n + \delta x_{n-κvp} - \delta x_{n-av}, y_n + y_n \gamma_y + h_y r_y],$$

όπου σε άμεσες μετρήσεις στην ίδια κλίμακα τηρείται ο όρος

$$\delta x_{1-κvp} = \delta x_{n-κvp}$$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο, θα υπολογίσουμε την κλίση της οριακής ευθείας Z-E και, στη συνέχεια, θα εντοπίσουμε τη διαφοροποίησή της από την κλίση της πειραματικής  $b$ , η οποία σε συνθήκες  $\sigma_y = 0$  ορίζεται από τη σχέση

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$

Σύμφωνα με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η κλίση της οριακής ευθείας Z-E υπολογίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
b_{Z-E} &= \frac{y_E - y_Z}{x_E - x_Z} = \frac{(y_n + y_n \gamma_y + h_y r_y) - (y_1 + y_1 \gamma_y + h_y r_y)}{(x_n + \delta x_{\kappa\nu\rho} - \delta x_{n-av}) - (x_1 + \delta x_{\kappa\nu\rho} + \delta x_{1-av})} = \\
&= \frac{(y_n - y_1) + \gamma_y (y_n - y_1)}{(x_n - x_1) - (\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})} = \frac{\frac{y_n - y_1}{(x_n - x_1)} + \frac{\gamma_y (y_n - y_1)}{(x_n - x_1)}}{1 - \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{(x_n - x_1)}} = \\
&= \frac{b + \gamma_y b}{1 - \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{(x_n - x_1)}} \approx b \left(1 + \gamma_y\right) \left(1 + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{(x_n - x_1)}\right) \approx \\
&= b + b \gamma_y + \frac{b \times (\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} = b + \Delta b
\end{aligned}$$

όπου ο δευτέρας τάξης μικρός όρος  $\gamma_y \times \delta x_{av} \times b$  αγνοήθηκε και αξιοποιήθηκαν οι 2 πρώτοι όροι της σειράς Teilor:

$$\frac{1}{1-h} \approx 1+h, \quad (h \ll 1).$$

Τελικά, το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα 2 όργανα είναι:

$$\Delta b_{op\gamma} = b \gamma_y + \frac{b \times (\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{x_n - x_1} = b \left( \gamma_y + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{x_n - x_1} \right).$$

Σε όμοια σχέση θα καταλήξουμε αν εξετάσουμε την οριακή ευθεία Γ-Δ, αλλά με αρνητικό πρόσημο της όλης παράστασης, γεγονός που μας επιτρέπει στο σφάλμα της κλίσης να προσθέσουμε το σύμβολο  $\pm$ :

$$\Delta b_{op\gamma} = \pm b \left( \gamma_y + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{x_n - x_1} \right). \quad (68)$$

Καθώς σε άμεσες μετρήσεις στην ίδια κλίμακα τηρείται ο όρος

$$\delta x_{n-av} = \delta x_{1-av},$$

η σχέση (68) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$\Delta b_{op\gamma} = \pm b \left( \gamma_y + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{x_n - x_1} \right) = \pm b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right) = \pm b \left( \gamma_y + \frac{\psi_x}{x_n - x_1} \right), \quad (69)$$

ενώ σε μετρήσεις όπου στις τιμές των  $x_i$  το σφάλμα ανάγνωσης σημειώνεται ως  $0,1\psi_x$ , το σφάλμα στην κλίση υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta b_{op\gamma} = \pm b \left( \gamma_y + \frac{2 \times 0,1\psi_x}{x_n - x_1} \right). \quad (70)$$

**Σημείωση.** Καθώς είναι *ασύμφορο*, το ενδιαφερόμενο φυσικό μέγεθος να προσδιορίζεται από τον ελεύθερο όρο  $a$ , τον υπολογισμό του σφάλματος  $\Delta a_{op\gamma}$  θα τον παραλείψουμε.

**12.9.7.1. Ολικό σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με ψηφιακό μετρητή των  $y_i$  και αναλογικό των  $x_i$**

Όταν η διασπορά των τιμών  $y_i$  δεν είναι 0 ( $\sigma_y \neq 0$ ), σε μετρήσεις των  $x_i$  και  $y_i$  με μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ), με πιθανότητα  $99,73 < P < 100 \%$ , το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση της βέλτιστης πειραματικής ευθείας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b \left( \gamma_y + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{x_n - x_1} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (71)$$

όπου η κλίση  $b$  προσδιορίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Η σχέση (71) μπορεί να σημειωθεί και ως:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b \left( \gamma_y + \frac{\psi_x}{x_n - x_1} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (72)$$

ή ως:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b \left( \gamma_y + \frac{0,2\psi_x}{x_n - x_1} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (73)$$

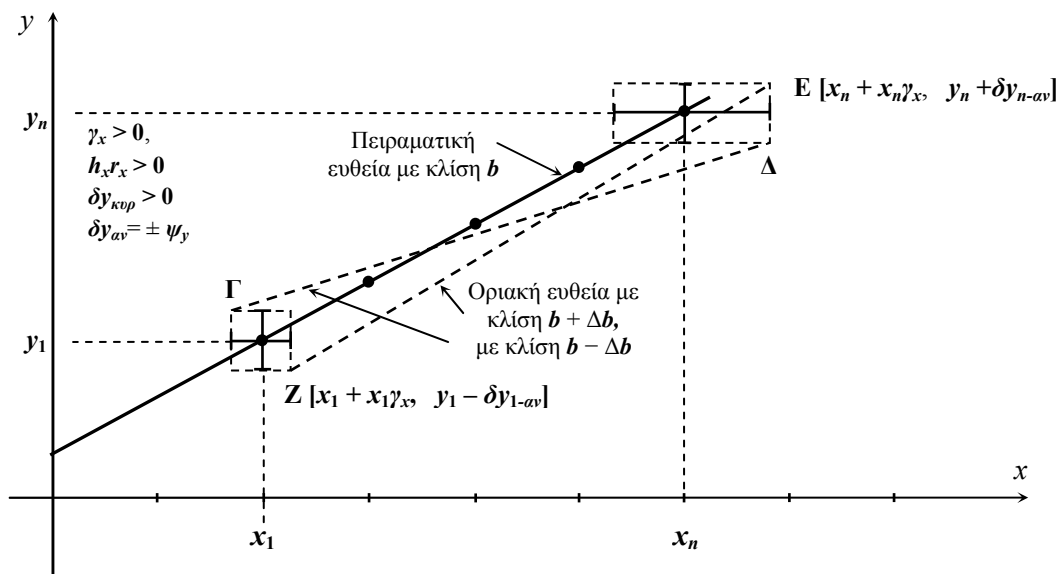
όταν στον αναλογικό μετρητή των  $x_i$ , οι τιμές τους σημειώνονται με σφάλμα ανάγνωσης  $0,1\psi_x$ .

**Σημείωση.** Και στο μέρος αυτό, το σφάλμα του ελευθέρου όρου  $a$  που προκαλούν τα όργανα θα το παραλείψουμε.

**12.9.8. Όργανα μικτά.  $\Delta b_{οργ}$  σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $y_i$  και ψηφιακό των  $x_i$**

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο, θα υπολογίσουμε την κλίση της οριακής ευθείας Z-E και, στη συνέχεια, θα εντοπίσουμε τη διαφοροποίησή της από την κλίση της πειραματικής ευθείας, που σε συνθήκες  $\sigma_y = 0$  υπολογίζεται από τη σχέση (Σχ. 17):

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}.$$



**Σχήμα 17.**  $\Delta b_{οργ}$  σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $y_i$  και ψηφιακό των  $x_i$ .

Έστω ότι σε άμεσες μετρήσεις των  $x_i$  και  $y_i$ , οι κλίμακες των 2 οργάνων δεν αλλάζουν.  
Θα υποθέσουμε ότι στον ψηφιακό μετρητή των  $x_i$  οι παράμετροι ακρίβειας είναι θετικοί αριθμοί, δηλαδή:

$$\gamma_x > 0 \quad \text{και} \quad h_x r_x > 0.$$

Θα υποθέσουμε ακόμη ότι στον αναλογικό μετρητή των  $y_i$  το κύριο σφάλμα του οργάνου είναι ένας σταθερός και θετικός αριθμός, δηλαδή:

$$\delta y_{\kappa\rho} > 0,$$

ενώ το σφάλμα ανάγνωσης στις τιμές των  $y_i$ , δηλαδή  $\delta y_{av}$ , μπορεί να έχει πρόσημο + ή πρόσημο -.

Για να είναι η ευθεία Z-E οριακή, και επομένως εγγυημένη, στο σημείο  $y_1$ , στο σφάλμα ανάγνωσης πρέπει να προσδίδεται πρόσημο -, ενώ στο σημείο  $y_n$ , πρόσημο +.

Υπό τις συνθήκες αυτές, η κλίση της οριακής ευθείας Z-E (Σχ.17) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$b_{Z-E} = \frac{y_E - y_Z}{x_E - x_Z} = \frac{(y_n + \delta y_{n-\kappa\rho} + \delta y_{n-av}) - (y_1 + \delta y_{1-\kappa\rho} - \delta y_{1-av})}{(x_n + \gamma_x x_n + h_x r_x) - (x_1 + \gamma_x x_1 + h_x r_x)} =$$

$$\frac{(y_n - y_1) + \delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{(x_n - x_1) - \gamma_x (x_n - x_1)} = \frac{b + \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{(x_n - x_1)}}{1 - \gamma_x} \approx \left( b + \frac{b(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} \right) (1 + \gamma_x) \approx$$

$$b + b \gamma_x + \frac{b(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} = b + \Delta b,$$

στην οποία αγνοήθηκε ο δευτέρας τάξης μικρός όρος  $\gamma_x \times \delta y_{av} \times b$  και αξιοποιήθηκε η προσέγγιση

$$\frac{1}{1 - \gamma_x} \approx 1 + \gamma_x, \quad (\gamma_x \ll 1).$$

Τελικά, για το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα 2 όργανα προκύπτει η σχέση

$$\Delta b = b \left( \gamma_x + \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} \right).$$

Σε όμοια σχέση θα καταλήξουμε αν εξετάσουμε την οριακή ευθεία Γ-Δ, αλλά με αρνητικό πρόσημο της όλης παράστασης. Αυτό μας επιτρέπει το σφάλμα στην κλίση να το σημειώσουμε ως:

$$\Delta b = \pm b \left( \gamma_x + \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} \right). \quad (74)$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί, καθώς σε άμεσες μετρήσεις στην ίδια κλίμακα τηρείται ο όρος:

$$\delta y_{n-av} = \delta y_{1-av} = \psi_y / 2$$

Στις μετρήσεις αυτές το σφάλμα στην κλίση υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta b = \pm b \left( \gamma_x + \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} \right) = \pm b \left( \gamma_x + \frac{2\delta y_{av}}{y_n - y_1} \right) = \pm b \left( \gamma_x + \frac{\psi_y}{y_n - y_1} \right) \quad (75)$$

**Σημείωση 1.** Καθώς η ρύθμιση των τιμών  $x_i$  μπορεί να γίνεται με βήμα της διακριτικής ικανότητας του ψηφιακού οργάνου, που είναι μία τάξη μικρότερο από το ποσοστιαίο σφάλμα  $\gamma_x$ , η ακρίβεια του πειράματος μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, αν τις τιμές των  $x_i$  τις ρυθμίζουμε, με μικρό βήμα, προκειμένου στον αναλογικό μετρητή των  $y_i$  η βελόνα να βρίσκεται πάνω από τη χαρακιά «ακριβώς» (!), δηλαδή οι τιμές των  $y_i$  να σημειώνονται με σφάλμα ανάγνωσης μικρότερο από  $0,1\psi_y$ . Σε πειράματα όπου τηρείται αυτή η διαδικασία, το σφάλμα στην κλίση, λόγω οργάνων, μειώνεται και η σχέση (75) παίρνει τη μορφή:

$$\Delta b = \pm b \left( \gamma_x + \frac{2\delta y_{av}}{y_n - y_1} \right) = \pm b \left( \gamma_x + \frac{0,2\psi_y}{y_n - y_1} \right). \quad (76)$$

**Σημείωση 2.** Σε άμεσες μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $y_i$  και ψηφιακό των  $x_i$ , το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα 2 όργανα είναι απαλλαγμένο:

από το σταθερό όρο  $h_x r_x$ , του ψηφιακού μετρητή των  $x_i$ ,

από το κύριο «σφάλμα» του αναλογικού μετρητή των  $y_i$ ,

καθώς το σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού μετρητή των  $y_i$  δύναται να μειωθεί 5 φορές!

**Σημείωση 3.** Το σφάλμα του ελεύθερου όρου  $a$ , θα το παραλείψουμε και εδώ.

### 12.9.8.1. Ολικό σφάλμα στην κλίση σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των $y_i$ και ψηφιακό των $x_i$

Όταν η διασπορά των τιμών  $y_i$  δεν είναι 0 ( $\sigma_y \neq 0$ ), σε μετρήσεις με μικρό αριθμό μετρήσεων  $n$  ( $3 < n < 10$ ), με πιθανότητα  $99,73 < P < 100$ , το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση της βέλτιστης πειραματικής ευθείας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta b = b \left( \gamma_x + \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (77)$$

όπου η κλίση  $b$  υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Σε άμεσες μετρήσεις των  $y_i$ , στην ίδια κλίμακα τηρείται ο όρος:

$$\delta y_{n-av} = \delta y_{1-av} = \psi_y / 2.$$

Στις μετρήσεις αυτές, στη σχέση (77) το άθροισμα  $\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}$  είναι  $\psi_y$  και επομένως το σφάλμα στην κλίση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b \left( \gamma_x + \frac{\psi_y}{y_n - y_1} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}. \quad (78)$$

Σε μετρήσεις όπου στις τιμές των  $y_i$  το σφάλμα ανάγνωσης σημειώνεται ως  $0,1\psi_y$ , στη σχέση (77) το άθροισμα  $\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}$  είναι  $0,2\psi_y$ , ενώ το σφάλμα στην κλίση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ} = b \left( \gamma_x + \frac{0,2\psi_y}{y_n - y_1} \right) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}. \quad (79)$$

**Σημείωση.** Και στο μέρος αυτό, θα το παραλείψουμε τον υπολογισμό του σφάλματος του ελεύθερου όρου  $a$ , που προκαλούν τα σφάλματα των 2 οργάνων.

### 13. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε γραμμική σχέση τύπου $y = Bx$ . (μετρητές ψηφιακοί)

#### 13.1 Εισαγωγή

Σε μερικά προβλήματα, η σχετική θεωρητική ανάλυση της πειραματικής μεθόδου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η σχέση μεταξύ των φυσικών μεγεθών  $x$  και  $y$  είναι τύπου

$$y = Bx.$$

Εδώ το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής. Σε μετρήσεις με ιδανικούς μετρητές και σε συνθήκες  $\sigma_y \neq 0$ , από τα  $n$  πειραματικά ζεύγη  $(x_i, y_i)$ , να υπολογιστεί η κλίση  $b$  της βέλτιστης πειραματικής ευθείας,

$$y = bx,$$

η οποία με τον καλύτερο τρόπο προσομοιώνει τα πειραματικά σημεία.

Συνήθως, στα πειράματα ενδιαφέρει η κλίση της πειραματικής ευθείας,  $b$ , πίσω από την οποία βρίσκεται κάποιο φυσικό μέγεθος που ζητείται να προσδιοριστεί.

Παράλληλα, ελέγχεται πειραματικά αν η σχέση μεταξύ των μεταβλητών  $x$  και  $y$  είναι γραμμική.

Και στο πρόβλημα αυτό, τη διασπορά των τιμών  $x_i$  θα τη θεωρούμε 0 ( $\sigma_x = 0$ ), ενώ τις τιμές των  $y_i$  θα τις θεωρούμε τυχαία διασπαρμένες με σταθερή διασπορά  $\sigma_y$  ( $\sigma_y \neq 0$ ). Στην ανάλυση, θα υποθέσουμε ακόμη ότι οι δύο μετρητές είναι ψηφιακοί.

Ακολουθώντας τη βασική αρχή της Μετρολογίας, και εδώ, το ολικό σφάλμα στην κλίση θα το υπολογίσουμε ως άθροισμα 2 όρων:

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ}$$

ενώ την πραγματική κλίση  $B$ , θα τη σημειώνουμε ως

$$B = b \pm \Delta b_{ολικο}.$$

Λόγω διασποράς των πειραματικών τιμών  $y_i$ , μετρώντας την κλίση της μίας βέλτιστης ευθείας, δεν αναμένουμε η κλίση της να συμπίπτει με την κλίση της πραγματικής, δηλαδή της ευθείας

$$y = Bx.$$

Με την έννοια αυτή,

$$b \neq B,$$

Στο μοντέλο της μεθόδου, η πραγματική τιμή της κλίσης υπολογίζεται ως μέσος όρος των κλίσεων  $b_k$ , άπειρων βέλτιστων ευθειών:

$$B = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}{k}.$$

Τηρώντας την παράδοση των πανεπιστημιακών εργαστηριακών εγχειριδίων, θα υπολογίσουμε πρώτα την κλίση  $b$ , της βέλτιστης πειραματικής ευθείας:

$$y = bx,$$

σε προσέγγιση ιδανικών οργάνων.

#### 13.2. Η κλίση $b$ , της βέλτιστης πειραματικής ευθείας $y = bx$ ( $\sigma_y \neq 0$ )

Η εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στη συνάρτηση

$$y = bx,$$

οδηγεί στον όρο

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 = \text{ελάχιστο (βλ. τον εργαστηριακό οδηγό)}, \quad (80)$$

όπου η αναγκαία συνθήκη για ελάχιστο  $S$  είναι

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \text{ή} \quad 2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)x_i = 0. \quad (81\alpha, \beta)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει :

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = b \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Επομένως, η τιμή της κλίσης  $b$ , της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = bx$  είναι:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (82)$$

Σύμφωνα με το μοντέλο της μεθόδου, θεωρούμε άπειρες πειραματικές ευθείες, με τυπική απόκλιση στις κλίσεις  $\sigma_b$ .

### 13.3. Τυπική απόκλιση της κλίσης $b$ . Προσέγγιση ιδανικών οργάνων

Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης  $\sigma_b^2$  της κλίσης  $b$  των κλίσεων  $b_k$  (βλ. Σχ. 9), θα λάβουμε υπόψη τις συνθήκες:

$$\sigma_x = 0, \quad \text{και} \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \dots = \sigma_{y_n} = \sigma_y = \text{σταθ},$$

όπου  $\sigma_y$  είναι η τυπική απόκλιση των τιμών  $y_i$ , την οποία θα τη θεωρούμε γνωστή ή με κάποιον τρόπο προσδιορισμένη.

Επομένως, την παράμετρο  $\sigma_b^2$  θα την υπολογίσουμε συναρτήσει  $\sigma_y^2$ .

Καθώς  $b = b(y_1, y_2, y_3 \dots y_n)$ , για το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης των  $b_k$ , δηλαδή τη  $\sigma_b^2$ , μπορούμε να σημειώσουμε τη γενική σχέση:

$$\sigma_b^2 = \left( \frac{\partial b}{\partial y_1} \right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial y_2} \right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial y_3} \right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left( \frac{\partial b}{\partial y_n} \right)^2 \sigma_{y_n}^2, \quad (83)$$

όπου οι παράγωγοι στις παρενθέσεις μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση (82), που είναι:

$$\frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{x_k}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Από την αντικατάσταση των παραγώγων αυτών στη γενική σχέση (83), για τη παράμετρο  $\sigma_b^2$  προκύπτει η σχέση:

$$\sigma_b^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \sigma_y^2}{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (84)$$

όπου το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης των  $y_i$ , δηλαδή η  $\sigma_y^2$ , μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο για τα  $d_i^2$ :

$$\sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1)}. \quad (85)$$

Στη σχέση (85), η διαίρεση γίνεται δια  $(n-1)$  και όχι  $(n-2)$ , καθότι στο πρόβλημα αυτό ο ελάχιστος αριθμός των πειραματικών ζευγών  $(x_i, y_i)$  δεν είναι 3 αλλά 2.

Θυμίζουμε, ότι στις σχέσεις

$$y = a + bx$$

και

$$y = bx,$$

η τυπική απόκλιση των  $y_i$ , δηλαδή η  $\sigma_y$ , μπορεί να μετρηθεί και πειραματικά σε ένα ξεχωριστό πείραμα, μετρώντας  $k$  φορές την τιμή της  $y_i$  στο σημείο  $x_i$ .

Ωστόσο, στο βαθμό που σε όλα τα σημεία  $y_i$  τηρείται ο όρος  $\sigma_y = \sigma_{\text{σταθ}}$ , το ξεχωριστό πείραμα είναι περιττό, καθώς η τιμή της  $\sigma_y$  μπορεί να υπολογιστεί και μέσω των  $d_i$ , από τη σχέση (85), που είναι βολικότερα τελικά.

#### 13.4. Κλίση και τυπική απόκλιση της κλίσης σε συνάρτηση $y = bx$

Σε μετρήσεις με μεγάλα  $n$ , για τα μεγέθη  $b$ ,  $\sigma_b^2$ ,  $\sigma_y$  και  $\sigma_b$ , καταλήγουμε τελικά στις ακόλουθες σχέσεις:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (86)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (87)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (88)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1)}} \quad (89)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}}. \quad (90)$$

Σε μετρήσεις με μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ), η αβεβαιότητα της κλίσης υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Delta b_{\text{τυχ}} = t_{n,p} \sigma_b,$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

#### 13.5. $\Delta b_{\text{οργ}}$ που προκαλούν τα 2 ψηφιακά όργανα, σε συνάρτηση τύπου $y = bx$ ( $\sigma_y = 0$ )

Θα υπολογίσουμε τώρα το σφάλμα στην κλίση  $b$  που οφείλεται μόνο στα σφάλματα των 2 οργάνων.

Την ανάλυση θα την κάνουμε σε προσέγγιση μηδενικής διασποράς και των τιμών  $y_i$  ( $\sigma_y = 0$ ). Θα υποθέσουμε ακόμη ότι τα δύο όργανα είναι ψηφιακά, με παραμέτρους ακριβείας:

$$\text{Accuracy (x): } \gamma_x (\%) + h_x r_x$$

και

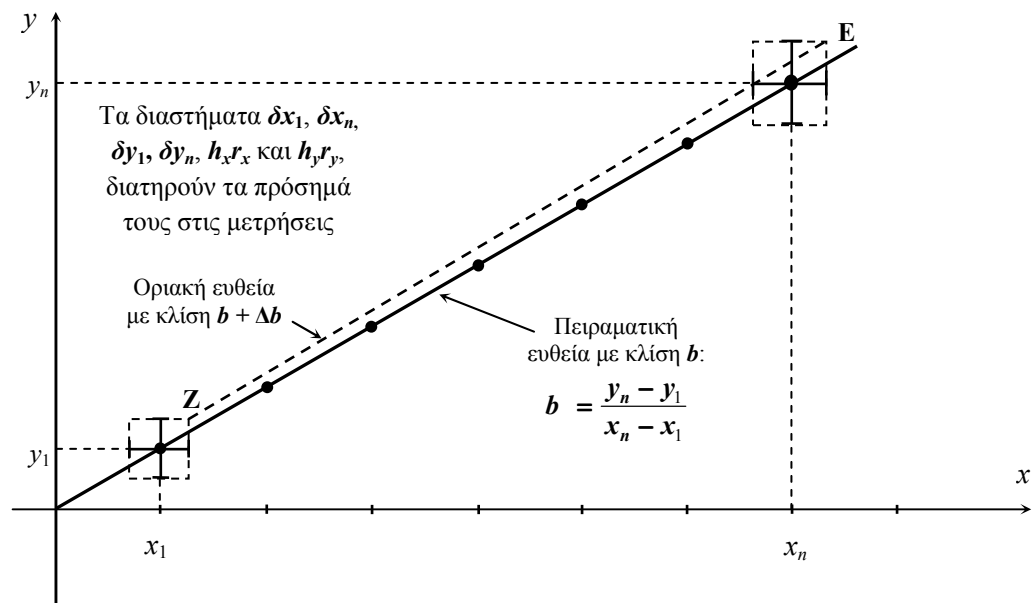
$$\text{Accuracy (y): } \gamma_y (\%) + h_y r_y,$$

αντίστοιχα.

Και εδώ, θα θεωρούμε ότι οι μετρήσεις γίνονται στις ίδιες κλίμακες των οργάνων. Για την ανάλυση, θεωρούμε το Σχ. 18, όπου εικονίζονται η πειραματική ευθεία

$$y = bx,$$

όπως και η οριακή ευθεία Z-E, η κλίση της οποίας διαφέρει από την πειραματική κατά  $\Delta b_{opg}$ .



Σχήμα 18. Σφάλμα στην κλίση που συνεισφέρουν τα 2 ψηφιακά όργανα.

Και στο πρόβλημα αυτό, την προσέγγιση  $\sigma_y = 0$  τη συνοδεύουμε με την εικόνα που βλέπουμε στο Σχ. 18, όπου τα πειραματικά σημεία τα φανταζόμαστε να πέφτουν πάνω σε μία ευθεία ακριβώς, ωστόσο με κλίση διαφορετική, κατά  $\Delta b_{opg}$ , από την κλίση της πραγματικής (δεν τη χαραξάμε στο σχήμα).

Επίσης, στην ανάλυση θα θεωρούμε ότι τα μεγέθη  $\gamma_x, h_x r_x, \gamma_y$  και  $h_y r_y$ , στις μετρήσεις έχουν σταθερή τιμή και πρόσημο, που θα το θεωρούμε σε όλα τα μεγέθη θετικό.

Για τον υπολογισμό του όρου  $\Delta b_{opg}$ , αρκεί να υπολογιστεί η κλίση της οριακής ευθείας Z-E και, στη συνέχεια, να υπολογιστεί η διαφοροποίησή της από την κλίση της πειραματικής, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}.$$

Καθώς τα πρόσημα των σφαλμάτων είναι θετικά, στην ευθεία Z-E οι συντεταγμένες του σημείου Z είναι:

$$Z[x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1],$$

ενώ οι συντεταγμένες του σημείου E είναι:

$$E[x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n].$$

Από τα σφάλματα των 2 ψηφιακών οργάνων, για τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων,  $\delta x$  και  $\delta y$ , προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= x_1 \gamma_x + h_x r_x, \\ \delta x_n &= x_n \gamma_x + h_x r_x\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= y_1 \gamma_y + h_y r_y, \\ \delta y_n &= y_n \gamma_y + h_y r_y\end{aligned}$$

από τις οποίες, για την κλίση της οριακής ευθείας Z-E προκύπτει η παράσταση:

$$b_{Z-E} = \frac{y_E - y_Z}{x_E - x_Z} = \frac{(y_n + \gamma_y y_n + h_y r_y) - (y_1 + \gamma_y y_1 + h_y r_y)}{(x_n + \gamma_x x_n + h_x r_x) - (x_1 + \gamma_x x_1 + h_x r_x)} =$$

$$\frac{(y_n - y_1) + \gamma_y (y_n - y_1)}{(x_n - x_1) + \gamma_x (x_n - x_1)} = b \frac{1 + \gamma_y}{1 + \gamma_x} \approx b_{\text{πειρ}} (1 + \gamma_y)(1 - \gamma_x) = b(1 + \gamma_y - \gamma_x - \gamma_y \gamma_x) \approx$$

$$b + b(\gamma_y - \gamma_x) = b + \Delta b$$

όπου αγνοήθηκε το δευτέρας τάξης γινόμενο  $\gamma_y \times \gamma_x$ . Στην τελευταία σχέση είναι:

$$\Delta b = b(\gamma_y - \gamma_x). \quad (91)$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση (91) μπορεί να αξιοποιηθεί ως έχει όταν είναι γνωστά τα πρόσσημα των ποσοστιαίων σφαλμάτων  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ .

Συνήθως, οι κατασκευάστριες εταιρείες δεν αναφέρουν το πρόσσημο των ποσοστιαίων σφαλμάτων, δηλώνοντας μόνο την αριθμητική τους τιμή.

Στην περίπτωση αυτή η σχέση (91) έχει τη μέγιστη τιμή και αποκτά οριακό και εγγυημένο χαρακτήρα όταν στην παρένθεση προσθέτουμε τα μέτρα των ποσοστιαίων σφαλμάτων  $\gamma_y$  και  $\gamma_x$ :

$$\Delta b = b(|\gamma_y| + |\gamma_x|). \quad (92)$$

### 13.6. Ολικό «σφάλμα» της κλίσης της βέλτιστης πειραματικής ευθείας $y = bx$ ( $\sigma_y \neq 0$ )

Σε μετρήσεις με μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ) και με μη μηδενική διασπορά των τιμών  $y_i$  ( $\sigma_y \neq 0$ ), την κλίση  $B$  της πραγματικής ευθείας, όπως και το σφάλμα της, τα σημειώνουμε ως:

$$B = b \pm \Delta b_{ολ},$$

όπου το  $b$  παριστάνει την κλίση της βέλτιστης πειραματικής ευθείας (της πρώτης του μοντέλου, Σχ.9), η τιμή της οποίας υπολογίζεται από τη σχέση

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (93)$$

ενώ το ολικό σφάλμα στην κλίση,  $\Delta b_{ολ}$ , υπολογίζεται από τον τύπο

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τοχ} = b(\gamma_y + \gamma_x) + t_{n,p} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}}, \quad P \geq 99,7 \%, \quad (94)$$

όπου  $t_{n,p}$  είναι ο συντελεστής Student.

### 13.7. Μερικά λεπτά σημεία της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

#### 13.7.1. Συνθήκες $\sigma_x = 0$ και $\sigma_y = \text{σταθ.}$

Σημειώνουμε, ότι για τις σχέσεις  $a$  και  $\sigma_a$ ,  $b$  και  $\sigma_b$ , που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε αυτές τις σημειώσεις, ισχύουν δύο περιοριστικοί όροι:

(α) - Στις εφαρμογές της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, από τις δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$ , για  $x$  επιλέγεται η μεταβλητή που δεν υφίσταται τυχαίες διακυμάνσεις, δηλαδή  $\sigma_x = 0$ . Επομένως τις τυχαίες διακυμάνσεις τις υφίσταται μόνο η μεταβλητή  $y$ .

(β) - Οι μαθηματικές σχέσεις για τις παραμέτρους  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_a$  και  $\sigma_b$ , που αναφέρονται στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και εδώ, παρήχθησαν υπό την προϋπόθεση ότι οι τυχαίες διακυμάνσεις της  $y$  είναι ίδιες σε όλα τα σημεία  $y_i$ . (βλ. μοντέλο της μεθόδου, ίδιες γκαουσιανές στο Σχ.9, οι οποίες υποδεικνύουν μία σταθερή τυχαία παρεμβολή στις μετρήσεις).

Επομένως, στην επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων πρέπει να τηρείται ο όρος:

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \dots \sigma_{yn} = \sigma_y = \text{σταθ.}$$

Τους δύο αυτούς όρους θα τους εξετάσουμε σε ένα παράδειγμα εργαστηριακής Άσκησης:

#### «Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο της πτώσης των σωμάτων»

Στην Άσκηση 1 του εργαστηριακού οδηγού, γίνεται μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο της πτώσης των σωμάτων. Για το σκοπό αυτό, μετράνε το χρόνο  $t$ , πτώσης μιας μεταλλικής σφαίρας, που διανύει απόσταση  $h$ .

Στις μετρήσεις, μηδενική διασπορά έχουν οι τιμές της  $h$ , ενώ στις τιμές του χρόνου  $t_i$ , παρατηρείται «μέση διασπορά»  $\sigma_t$ , δηλαδή  $\sigma_t \neq 0$ .

Για να εφαρμοστούν οι τύποι της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και εδώ, για ανεξάρτητη μεταβλητή πρέπει να οριστεί η  $h$ , καθώς  $\sigma_h = 0$ . Για την ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων, η επιλογή αυτή οδηγεί στην ισοδύναμη σχέση

$$t^2 = \frac{2}{g} h,$$

η οποία μπορεί να γραμμικοποιηθεί με 2 τρόπους:

1. Μέσω της επιλογής  $y = t^2$ ,  $x = h$ , η οποία οδηγεί στη γραμμική σχέση

$$y = b_1 x, \quad \text{όπου} \quad b_1 = \frac{2}{g}.$$

2. Μέσω της επιλογής  $y = t$ ,  $x = \sqrt{h}$ , η οποία οδηγεί στη γραμμική σχέση

$$y = b_2 x, \quad \text{όπου} \quad b_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}.$$

Προσέχουμε ότι στις δύο επιλογές, η συνθήκη  $\sigma_{y_i} = \text{σταθ}$  τηρείται στη δεύτερη, καθώς εδώ σε όλα τα σημεία  $t_i$  η «μέση διασπορά» στο χρόνο είναι  $\sigma_t$  και είναι ίδια σε όλες τις τιμές  $t_i$ . Αντίθετα, στην πρώτη επιλογή, η «μέση διασπορά» των  $(t_i)^2$  είναι  $2t\sigma_t$ , δηλαδή είναι ανάλογη του  $t$  και επομένως εδώ δεν τηρείται η συνθήκη  $\sigma_y = \text{σταθ}$ .

Στη δεύτερη επιλογή, χρήση των σχέσεων για τα  $\sigma_b$  και  $\sigma_a$  που βλέπουμε στο εργαστηριακό οδηγό είναι επιτρεπτή, ενώ στην πρώτη, η χρήση τους είναι αδύνατη.

Ωστόσο, η γραμμικοποίηση της αρχικής σχέσης μπορεί να γίνει όπως και στη πρώτη επιλογή, αλλά στο βαθμό που η σχέση για την τυπική απόκλιση  $\sigma_b$  τροποποιηθεί κατάλληλα (βλ. σχόλιο της Άσκησης 4).

# Παραρτήματα

## Παράρτημα 1. Διακρίβωση των μετρητών

Η διακρίβωση του μετρητή είναι υποχρεωτική και πρέπει να γίνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα (κάθε 2 χρόνια), ακολουθώντας ένα αυστηρό πρωτόκολλο διακρίβωσης. Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και δαπανηρή και αποσκοπεί στον έλεγχο των παραμέτρων ακρίβειας του οργάνου. Αν, για παράδειγμα, διαπιστωθεί ολίσθηση αυτών των παραμέτρων, γίνεται η κατάλληλη ρύθμισή τους, προκειμένου να επανέλθουν στις αρχικές τους τιμές.

Η διακρίβωση επιτρέπει τον προσδιορισμό του διορθωτικού παράγοντα στις μετρήσεις, αυξάνοντας έτσι την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Είναι, όμως, παρακινδυνευμένο να γίνεται η χρήση του διορθωτικού παράγοντα, καθώς λόγω μέτριας ποιότητας των εξαρτημάτων του οργάνου, ο διορθωτικός παράγων θα ολισθαίνει σιγά-σιγά και μετά από μία ή μερικές εβδομάδες θα έχει άγνωστη τιμή. Αλλά και η συνθήκες του πειράματος διαφέρουν, συνήθως, από αυτές της διακρίβωσης. Από την παρατήρηση αυτή διαφαίνεται η ανάγκη το πείραμα να γίνεται αμέσως μετά τη διακρίβωση των μετρητών, φροντίζοντας για ίδιες πειραματικές συνθήκες. Η διαδικασία αυτή είναι πολύ άβολη και προβληματική, ιδίως όταν οι μετρήσεις έχουν μαζικό χαρακτήρα.

## Παράρτημα 2. Τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης

Στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε άλλα πανεπιστημιακά συγγράμματα, το μέγεθος

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}$$

ονομάζεται *τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης*.

Για να κατανοήσουμε τη φράση αυτή (οι έννοιες *τυπική απόκλιση* και *μία μέτρηση* είναι συγκρουόμενες) *πρέπει να θεωρήσουμε άπειρες τιμές των  $x_i$* . Πλην όμως, τις τιμές αυτές πρέπει να τις φανταστούμε κατανεμημένες όπως στον Πίνακα 1, όπου οι  $n$  μετρήσεις του πειράματός (είναι οι τονισμένες) συγκροτούν την πρώτη (κύρια) στήλη του άπειρου συνόλου.

Πίνακας 1

$x_{11}$	$x_{21}$	$x_{31}$	.....	$x_{k1}$	.....	$x_{\infty 1}$	→	γκαουσιανή με παράμετρο $\sigma_0$
$x_{12}$	$x_{22}$	$x_{32}$	.....	$x_{k2}$	.....	$x_{\infty 2}$	→	γκαουσιανή με παράμετρο $\sigma_0$
$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{33}$	.....	$x_{k3}$	.....	$x_{\infty 3}$	→	γκαουσιανή με παράμετρο $\sigma_0$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....		
$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	.....	$x_{ki}$	.....	$x_{\infty i}$	→	γκαουσιανή με παράμετρο $\sigma_0$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....		
$x_{1n}$	$x_{2n}$	$x_{3n}$	.....	$x_{kn}$	.....	$x_{\infty n}$	→	γκαουσιανή με παράμετρο $\sigma_0$
↓	↓	↓		↓		↓		
$\bar{x}_{1,n}$	$\bar{x}_{2,n}$	$\bar{x}_{3,n}$	.....	$\bar{x}_{k,n}$	.....	$\bar{x}_{\infty,n}$	→	γκαουσιανή με παράμετρο $\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

Στο θεωρητικό μοντέλο θεωρείται ότι το πείραμα των  $n$  μετρήσεων επαναλήφθηκε υπό τις ίδιες πειραματικές συνθήκες  $k$  φορές και, επίσης, ότι το  $k$  τείνει στο άπειρο. Προφανώς, στις στήλες, οι τιμές  $x_{ki}$  αναμένουμε να διαφέρουν μεταξύ τους, όπως και να διαφέρουν από την πραγματική τιμή  $X$ . Έστω ακόμη, ότι υπολογίστηκε και ο μέσος όρος των  $n$  τυχαίων τιμών της κάθε στήλης.

Στο άπειρο σύνολο των τυχαίων τιμών που υπακούουν στην κανονική κατανομή μπορούμε να παρατηρήσουμε τις εξής νομοτέλειες:

1. Στο βαθμό που οι μετρήσεις έγιναν υπό τις ίδιες πειραματικές συνθήκες, επομένως ίδιας έντασης των παραγόντων που προκαλούσαν τη διασπορά, σε οποιοδήποτε οριζόντιο άπειρο σύνολο των τυχαίων τιμών, για παράδειγμα, η δεύτερη μέτρηση όλων των στηλών, αναμένουμε ίδια παράμετρο κατανομής  $\sigma_0$  και ίδιες γκαουσιανές!
2. Η γκαουσιανή των μέσων όρων είναι στενότερη, με παράμετρο κατανομής μικρότερη από τη  $\sigma_0$  κατά ένα παράγοντα: ρίζα του  $n$ :

$$\sigma_{\mu\tau} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

Σημειώνουμε, ότι η παράμετρος  $\sigma_{\mu\tau}$  ονομάζεται τυπική απόκλιση των μέσων τιμών, την οποία δηλώνουμε τελικά σε μετρήσεις αυτού του είδους, ως τυπική απόκλιση της μέσης τιμής ή τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής.

Οι ιδιότητες αυτές επιτρέπουν στους ερευνητές να αντλούν τις πληροφορίες για τις ιδιότητες του άπειρου συνόλου, δηλαδή τη  $\sigma_0$ , από τις τιμές της πρώτης στήλης ( $\sigma_n$ ), δηλαδή τις τιμές του πειράματος που συγκροτούν την κύρια (πρώτη) στήλη του θεωρητικού μοντέλου και να μην καταφεύγουν σε πρόσθετες μετρήσεις.

Βλέπουμε τελικά, ότι η φράση «τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης» είναι μάλλον ατυχής και υπονοεί την εικόνα που βλέπουμε στον Πίνακα 1, δηλαδή την «τυπική απόκλιση των τυχαίων τιμών  $x_{ki}$  ή της κάθε μέτρησης», επομένως και της «μεμονωμένης (μίας μέτρησης)» μέτρησης του πειράματος, που «πάσχει» από τυχαίες διακυμάνσεις με παράμετρο κατανομής  $\sigma_0$ , η οποία σε πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων αποδίδεται προσεγγιστικά από τη  $\sigma_n$ :

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}.$$

Είναι, επομένως, σωστότερο να γίνεται λόγος για την «τυπική απόκλιση των μετρήσεων» και όχι «της μίας μέτρησης», υπονοώντας με τη φράση αυτή την «τυπική απόκλιση των τιμών  $\langle x_{ki} \rangle$ », σε αντιδιαστολή με την «τυπική απόκλιση των μέσων τιμών» της κάθε στήλης, η οποία είναι  $\sqrt{n}$  φορές μικρότερη.

### Παράρτημα 3. Ακρίβεια της επιλεγείσας μεθόδου και ακρίβεια του αποτελέσματος

Στη θεωρία σφαλμάτων τυχαίων τιμών γίνεται χρήση δύο ξεχωριστών εννοιών:

η «ακρίβεια της επιλεγείσας μεθόδου»

και

η «ακρίβεια του αποτελέσματος».

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στη θεωρία σφαλμάτων των τυχαίων τιμών, οι  $n$  τυχαίες τιμές,  $x_n$ , θεωρούνται απόλυτα ακριβείς, με την έννοια, ότι τα συστηματικά σφάλματα και τα σφάλματα των οργάνων με κάποιον τρόπο έχουν ανααιρεθεί.

Σε μετρήσεις αυτού του είδους, από την παραδοχή αυτή πηγάζει η παράδοση, την ακρίβεια μέτρησης να τη σχετίζουν με τη παράμετρο της διασποράς  $\sigma$  και όχι με το ακριβές σφάλμα ή με το σφάλμα του οργάνου. Έτσι, όσο μικρότερη είναι η  $\sigma_n$ , η οποία σε πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}},$$

τόσο πιο ακριβής θεωρείται η επιλεγείσα μέθοδος μέτρησης. Σε μεγάλες τιμές του  $n$ , η παράμετρος αυτή δεν εξαρτάται από τον αριθμό των μετρήσεων και τείνει να σταθεροποιηθεί.

Στη θεωρία σφαλμάτων τυχαίων τιμών γίνεται χρήση και της έννοιας «ακρίβεια του αποτελέσματος», εννοώντας με τη φράση αυτή το σφάλμα της μέσης τιμής, το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_{\mu\epsilon} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Σε αντίθεση με την τυπική απόκλιση  $\sigma$ , το σφάλμα της μέσης τιμής ή το τυπικό σφάλμα τείνει στο μηδέν, όταν το  $n$  τείνει στο άπειρο.

Στην πειραματική πρακτική, η προσέγγιση ιδανικού μετρητή τηρείται προσεγγιστικά όταν η τυπική απόκλιση των τυχαίων τιμών είναι μεγαλύτερη του σφάλματος του οργάνου, πάνω από 10 φορές. Από την παρατήρηση αυτή ανακύπτει η ανάγκη να προσδιοριστεί εκείνος ο αριθμός  $n_0$  (ο βέλτιστος), που κάνει το σφάλμα της μέσης τιμής ίσο με το σφάλμα του οργάνου. Πέραν του αριθμού αυτού, η βελτίωση της ακρίβειας μέτρησης αρχίζει να γίνεται ασήμαντη, καθώς στο άθροισμα

$$\Delta x_{ολ} = \Delta x_{οργ} + \Delta x_{τυχ},$$

ο αριθμός των μετρήσεων επηρεάζει τη συνιστώσα  $\Delta x_{τυχ}$ , αλλά δεν επηρεάζει τον όρο  $\Delta x_{οργ}$ .

#### Παράρτημα 4. Μερικές ιδιότητες της διασποράς $\sigma_0^2$

Εδώ, με τον όρο διασπορά, εννοούμε το Αγγλικό «Dispersion», δηλαδή το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης.

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων η σχέση για τη διασπορά της μέσης τιμής αποδεικνύεται και θεωρητικά, καθώς η διασπορά  $D(x)$  ορίζεται ως ολοκλήρωμα:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 z(x) dx,$$

όπου  $z(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής των σφαλμάτων της τυχαίας μεταβλητής  $x$ . Από τον ορισμό αυτόν προκύπτουν οι εξής ιδιότητες της διασποράς:

1. Όταν η συνάρτηση  $z(x)$  υπακούει στην κανονική κατανομή, τότε

$$D(x) = \sigma_{0x}^2.$$

όπου  $\sigma_0$  είναι παράμετρος της κανονικής κατανομής (παράμετρος πλάτους της γκαουσιανής).

2. Αν για την τυχαία μεταβλητή  $X$  η διασπορά είναι  $\sigma_{0x}^2$ , τότε για τη μεταβλητή  $bX$ , όπου  $b$  είναι σταθερά, η διασπορά είναι

$$D(x) = b^2 \sigma_{0x}^2.$$

3. Για μία σύνθετη τυχαία μεταβλητή  $\Psi$ , που είναι γραμμική επαλληλία των τυχαίων μεταβλητών  $X, Y, Z$ , δηλαδή:

$$\Psi = bX + cY + dZ \dots,$$

για τη διασπορά της  $\Psi$ , ισχύει η σχέση

$$D(\Psi) = b^2 \sigma_{0x}^2 + c^2 \sigma_{0y}^2 + d^2 \sigma_{0z}^2 \dots$$

4. Από την τελευταία σχέση προκύπτει η διασπορά της μέσης τιμής:

$$D(\bar{x}) = D\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}\right) = D\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \frac{1}{n}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right) =$$

$$\left(\frac{\sigma_{x_1}^2}{n^2} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{n^2} + \frac{\sigma_{x_3}^2}{n^2} + \dots + \frac{\sigma_{x_n}^2}{n^2}\right) = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n},$$

ωστόσο, στο βαθμό που οι τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων τιμών  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  είναι ίσες:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \dots = \sigma_{x_n} = \sigma_x,$$

δηλαδή όλες έχουν την ίδια τιμή που είναι  $\sigma_x$ . Στα πειράματα, το γεγονός αυτό εκδηλώνεται ως ίδιας έντασης τυχαία παρεμβολή στις μετρήσεις.

### Παράρτημα 5. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Διασπορές $\sigma_a^2$ και $\sigma_b^2$

#### Π5.1. Διασπορά του όρου $a$ , $\sigma_a^2$ .

Η ανάλυση γίνεται σε προσέγγιση ιδανικών μετρητών ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \mathbf{0}$ ,  $\sigma_x = \mathbf{0}$ ,  $\sigma_y = \mathbf{σταθ}$ ), ενώ τη διασπορά  $\sigma_y^2$  των τιμών  $y_i$  τη θεωρούμε με κάποιον τρόπο προσδιορισμένη.

Στο βαθμό που  $\sigma_y^2 \neq \mathbf{0}$ , οι διασπορές  $\sigma_a^2$  και  $\sigma_b^2$  εξαρτώνται από τη διασπορά  $\sigma_y^2$  των τιμών  $y_i$ . Για παράδειγμα, όταν  $\sigma_y^2 = \mathbf{0}$ , προφανώς,  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \mathbf{0}$ . Εδώ μόνο δύο πειράματα ή μόνο δύο ζεύγη τιμών  $(x_i, y_i)$  αρκούν για να προσδιοριστεί η ακριβής συνάρτηση

$$y = A + Bx.$$

Σε καταστάσεις που  $\sigma_y^2 \neq \mathbf{0}$ , που είναι οι συνηθέστερες, οι διασπορές  $\sigma_a^2$  και  $\sigma_b^2$  υπολογίζονται ως διασπορές έμμεσης μέτρησης, καθώς οι τιμές  $a$  και  $b$  εξαρτώνται από τα  $y_i$ :

$$a = a(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad \text{και} \quad b = b(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Η διασπορά της  $a = a(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ , ως συνάρτηση πολλών τυχαίων μεταβλητών, υπολογίζεται από τη γενική σχέση

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial a}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2. \quad (\text{Π5-1})$$

Όταν οι τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3}, \dots, \sigma_{y_n}$  είναι ίσες, δηλαδή

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \dots = \sigma_{y_n} = \sigma_y,$$

τότε από τη σχέση (39), για την  $a$ , όπου

$$a = \frac{(\sum y_i) \times (\sum x_i^2) - (\sum x_i) \times (\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

για τον υπολογισμό της διασποράς  $\sigma_a^2$  έχουμε τις συνθήκες:

$$\frac{\partial a}{\partial y_k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_k \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \dots = \sigma_{y_n} = \sigma_y. \quad (\text{Π5-2}\alpha, \beta, \gamma)$$

Η αντικατάστασή των όρων (Π5-2β) και (Π5-2γ) στη γενική σχέση (Π5-1), δίνει τελικά:

$$\sigma_a^2 = \frac{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)}{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]^2} \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sigma_y^2. \quad (\text{Π5-3})$$

### Π5.2. Διασπορά της κλίσης $b$ , $\sigma_b^2$ . Προσέγγιση ιδανικών μετρητών

Με όμοιο τρόπο υπολογίζεται και η διασπορά της κλίσης  $b$ ,  $\sigma_b^2$  (σωστότερα, των κλίσεων  $b_k$ , βλ. μοντέλο της μεθόδου, Σχ. 9).

Πράγματι, καθώς  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ , από τη σχέση (40), για την κλίση  $b$ , όπου

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

για τον υπολογισμό της διασποράς  $\sigma_b^2$  έχουμε τις συνθήκες:

$$\frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{nx_k - \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \dots = \sigma_{yn} = \sigma_y. \quad (\text{Π5-4}\alpha,\beta,\gamma)$$

Εδώ η γενική σχέση για τη  $\sigma_b^2$  έχει τη μορφή:

$$\sigma_b^2 = \left( \frac{\partial b}{\partial y_1} \right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial y_2} \right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left( \frac{\partial b}{\partial y_3} \right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left( \frac{\partial b}{\partial y_n} \right)^2 \sigma_{y_n}^2.$$

Η αντικατάστασή των παραπάνω όρων στη γενική σχέση δίνει:

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[ n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]^2} \sigma_y^2 = \frac{n \sigma_y^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (\text{Π5-6})$$

Στα εργαστηριακά εγχειρίδια τη σχέση αυτή την αναφέρουν συνήθως έμμεσα, μέσω της διασποράς  $\sigma_a^2$  (Π5-3), σε μορφή

$$\sigma_b^2 = \sigma_a^2 \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (\text{Π5-7})$$

Στις σχέσεις (Π5-3) και (Π5-6), οι διασπορές  $\sigma_a^2$  και  $\sigma_y^2$  είναι παράμετροι του Γενικού πιθανοσυνόλου. Ωστόσο όταν ο αριθμός  $n$  είναι πεπερασμένος, ο όρος  $\sigma_y^2$  με καλή προσέγγιση αποδίδεται με την ποσότητα:

$$\sigma_y^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{(n-2)}, \quad (\text{Π5-9})$$

η οποία μπορεί να υπολογιστεί, εφόσον πρώτα υπολογιστούν τα μεγέθη  $a$  και  $b$  και, στη συνέχεια, τα  $d_i$ .

Σημειώνουμε, ότι στη σχέση (Π5-9), η διαίρεση γίνεται δια  $(n - 2)$  και όχι  $(n - 1)$ .  
 Συνοψίζοντας, για τις διασπορές  $\sigma_a^2$  και  $\sigma_b^2$  έχουμε τελικά τις σχέσεις:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \times \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)} \quad (\text{Π5-10})$$

και

$$\sigma_b^2 = \frac{n\sigma_y^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \times \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)}. \quad (\text{Π5-11})$$

Τις σχέσεις αυτές, σε λίγο διαφορετική μορφή τις βλέπουμε και στον εργαστηριακό οδηγό.

### Παράρτημα 6. Γραμμικοποίηση της μαθηματικής σχέσης και ο όρος $\sigma_y = \text{σταθερά}$

Σε πολλές εργαστηριακές ασκήσεις, ο προτεινόμενος τρόπος γραμμικοποίησης της μαθηματικής σχέσης οδηγεί στην παραβίαση του όρου  $\sigma_y = \text{σταθερά}$ . Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης στις κλίσεις,  $\sigma_b^2$ , πρέπει να γίνεται μέσω της γενικής σχέσης για την τυπική απόκλιση συνάρτησης  $n$  τυχαίων μεταβλητών.

Επομένως, καθώς  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , για το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης των κλίσεων ισχύει η γενική σχέση:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση για την κλίση  $\mathbf{b}$ :

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Ο υπολογισμός αυτός δίνει:

$$\frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{nx_k - \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2},$$

ενώ η αντικατάστασή τους στη γενική σχέση δίνει τελικά:

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_1}^2 + \left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_2}^2 + \left[ nx_3 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y_n}^2}{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \right]^2}$$

Η σχέση αυτή, σε κάθε περίπτωση προσαρμόζεται αναλόγως (βλ. Άσκηση 4).

## Παράρτημα 7. «Σφάλμα» του A/D (Analog-to-Digital Converter) σε αυτοματοποιημένες μετρήσεις με υπολογιστές

Σε μερικές Ασκήσεις (Ακτινοβολία μέλανος σώματος, Έλεγχος θερμοκρασίας δοκιμίου και Βελτίωση του λόγου σήματος προς θόρυβο, Lock-In Amplifier) οι μετρήσεις γίνονται αυτόματα, με υπολογιστή, μέσω του 12-μπιτου ψηφιοποιητή-Interface 750, της Pasco, Physics & Engineering Education, California, USA.

Στο συνοδευτικό φυλλάδιο του ψηφιοποιητή Interface 750, μεταξύ άλλων αναφέρεται:

1. Three identical channels with differential inputs and 1 MΩ impedance
2. Three voltage gain settings on each analog channel: 1, 10, 100
3. Maximum usable voltage  $\pm 10$  V
4. Maximum Sampling Rate 250 kHz
5. Bandwidth up to 1 MHz (ζώνη συχνοτήτων ομαλής ενίσχυσης του σήματος 0-10<sup>6</sup> Hz)
6. Input amplifier slew rate 1,2 V/μs (μέγιστος ρυθμός ανόδου της τάσης στην έξοδο του ενισχυτή)
7. 12-bit Analog-to-Digital Conversion: resolution 4,88 mV
8. Offset voltage accuracy  $< \pm 3$  mV (ολίσθηση μηδενός)
9. For full-scale voltages the total error *is less than*  $\pm 15$  mV, accounting for the gain error in the input amplifier.

Και στους ψηφιοποιητές, το βήμα ψηφιοποίησης (resolution 4,88mV) δεν πρέπει να ταυτίζεται με το συνολικό σφάλμα του ψηφιοποιητή. Όπως και στα ψηφιακά βολτόμετρα, όπου το σφάλμα είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διακριτική του ικανότητα του οργάνου, και στους ψηφιοποιητές, το συνολικό σφάλμα είναι συνήθως μεγαλύτερο από το βήμα ψηφιοποίησης.

Για παράδειγμα, στον εκπαιδευτικό 12-μπιτο Interface 750, που αναφέραμε προηγουμένως, στην κλίμακα  $\pm 10$  V και ενίσχυση 1 (gain 1), ενώ το βήμα ψηφιοποίησης είναι  $\pm 4,88$  mV, το σφάλμα (άνω όριο) που εισάγει ο προενισχυτής του είναι

$$\pm (15 + 3) \text{ mV.}$$

Έτσι, στην έξοδο του ψηφιοποιητή, το συνολικό σφάλμα ψηφιοποίησης είναι

$$4,88 \text{ mV} + 18 \text{ mV} \leq 23 \text{ mV,}$$

δηλαδή το σφάλμα ψηφιοποίησης του A/D δεν υπερβαίνει τα 23 mV και επεκτείνεται, δυστυχώς, σε όλη την κλίμακα των 10 V, προκαλώντας μείωση της ακρίβειας (μεγάλο σχετικό σφάλμα) σε μικρές τιμές του σήματος. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται καταφεύγοντας στις άλλες δύο κλίμακες ενίσχυσης του σήματος, με ενίσχυση (gain) 10 ή 100.

## Παράρτημα 8. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις 4 αριθμητικές πράξεις

### Π.8.1. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος πρόσθεσης

Έστω προσεγγιστικοί αριθμοί  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . Ζητείται να υπολογιστεί το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του αθροίσματος  $u$ , όπου

$$u = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad (\text{Π8-1})$$

Στο πρόβλημα αυτό, θεωρούνται γνωστά τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των προσθετέων: δηλαδή τα  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ , ενώ τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων,  $\Delta_i$ , είναι άγνωστα.

*Λύση.* Έστω ότι  $\Delta_k$  είναι το ακριβές σφάλμα του προσεγγιστικού αριθμού  $a_k$ .

Το ακριβές σφάλμα του αθροίσματος  $u$  είναι

$$\Delta_u = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n. \quad (\text{Π8-2})$$

Για τις απόλυτες τιμές των όρων της σχέσης (Π8-2) ισχύει:

$$|\Delta_u| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2| + |\Delta_3| + \dots + |\Delta_n|. \quad (\text{Π8-3})$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος  $\varepsilon_u$ :

$$|\Delta_k| \leq \varepsilon_k.$$

Στη σχέση (Π8-3), η αντικατάσταση των  $|\Delta_k|$  με τα αντίστοιχα  $\varepsilon_k$ , δίνει:

$$|\Delta_u| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n. \quad (\text{Π8-4})$$

Επομένως, για τιμή του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος  $\varepsilon_u$  μπορούμε να θέσουμε το δεξί μέρος της σχέσης (Π8-4). Έχουμε τελικά:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n. \quad (\text{Π8-5})$$

### **Π8.2. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος αφαίρεσης**

Το εγγυημένο διάστημα σφάλματος αφαίρεσης έχει ίδιες ιδιότητες με αυτές της πρόσθεσης, καθώς την αφαίρεση μπορούμε να τη δούμε ως πρόσθεση θετικών και αρνητικών αριθμών, που ήδη εξετάσαμε.

### **Π8.3. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος πολλαπλασιασμού**

Το Εγγυημένο διάστημα σφάλματος πολλαπλασιασμού εξετάστηκε στο κύριο μέρος του κειμένου, στη σελ. 30.

### **Π8.4. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος διαίρεσης**

Έστω προσεγγιστικοί αριθμοί  $a$  και  $b$ , τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων των οποίων είναι  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$ , αντίστοιχα, ενώ τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι άγνωστα.

Έστω ακόμη, ότι  $b \neq 0$ . Ζητείται να υπολογιστεί το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του πηλίκου

$$u = \frac{a}{b}. \quad (\text{Π8-6})$$

*Λύση.* Έστω ότι οι ακριβείς τιμές των προσεγγιστικών  $a$  και  $b$  είναι  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Επίσης, έστω ακόμη ότι  $a > 0$  και  $b > 0$ .

Η ακριβής τιμή του πηλίκου είναι

$$U = \frac{A}{B} = \frac{\Delta_a + a}{\Delta_b + b},$$

ενώ το ακριβές σφάλμα του πηλίκου είναι

$$\Delta_u = U - u = \frac{\Delta_a + a}{\Delta_b + b} - \frac{a}{b} = \frac{b\Delta_a - a\Delta_b}{b\Delta_b + b^2}, \quad (\text{Π8-7})$$

όπου  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι οι ακριβείς τιμές των σφαλμάτων των τιμών  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα.

Στον παρανομαστή της σχέσης (Π8-7), ο όρος  $b\Delta_b$  είναι πολύ μικρότερος του  $b^2$  και επομένως μπορεί να αγνοηθεί.

Στην προσέγγιση  $b\Delta_b \ll b^2$ , η σχέση (Π8-7) γίνεται

$$\Delta_u = \frac{b\Delta_a - a\Delta_b}{b^2}. \quad (\text{Π8-8})$$

Για τις απόλυτες τιμές των  $\Delta_a$ ,  $\Delta_b$ ,  $a$  και  $b$ , ισχύει η ανισότητα:

$$|\Delta_u| \leq \frac{|b||\Delta_a| + |a||\Delta_b|}{b^2}. \quad (\text{Π8-9})$$

Η αντικατάσταση των  $|\Delta_a|$  και  $|\Delta_b|$  με τα άνω όριά τους, δηλαδή τα  $\varepsilon_a$  και  $\varepsilon_b$ , δίνει τελικά:

$$\varepsilon_u = \frac{|a|\varepsilon_b + |b|\varepsilon_a}{b^2}. \quad (\text{Π8-10})$$

Η σχέση (Π8-10) δίνει τη λύση, η οποία είναι σχεδόν ταυτόσημη με το διαφορικό του πηλίκου.

## Παράρτημα 9. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος συνάρτησης προσεγγιστικών μεταβλητών

Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: δίνονται τα εγγυημένα διαστήματα σφαλμάτων:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ , των προσεγγιστικών μεταβλητών  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , της συνάρτησης  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , όπου τα πρόσημα των ακριβή σφαλμάτων  $\Delta_i$  είναι άγνωστα.

Ζητείται να υπολογιστεί το εγγυημένο διάστημα σφάλματος της συνάρτησης στο σημείο  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

*Λύση.* Έστω συνάρτηση  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Έστω ακόμη,  $|\Delta x_i|$  είναι το ακριβές σφάλμα της προσεγγιστικής μεταβλητής  $x_i$ .

Το ακριβές σφάλμα της συνάρτησης  $f$  είναι

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)|. \quad (\text{Π9-1})$$

Στην εργαστηριακή πρακτική, τα μεγέθη  $|\Delta x_i|$  είναι συνήθως μικρά. Αυτό μας επιτρέπει να αγνοήσουμε τους όρους τύπου  $|\Delta x_i|^2$  και  $|\Delta x_i| \cdot |\Delta x_k|$ . Στην προσέγγιση αυτή, η σχέση (Π9-1) γίνεται

$$|\Delta u| \approx |df(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|. \quad (\text{Π9-2})$$

Αντικαθιστώντας τα  $|\Delta x_i|$  και  $|\Delta u|$  με τις οριακές τους τιμές, δηλαδή με τα  $\varepsilon_i$  και  $\varepsilon_u$ , αντίστοιχα, θα καταλήξουμε στη σχέση που είναι βασική στη θεωρία σφαλμάτων:

$$\varepsilon_f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \varepsilon_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \varepsilon_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \varepsilon_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| \varepsilon_3 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \varepsilon_n. \quad (\text{Π9-3})$$

## Παράρτημα 10. Κατανομή πυκνότητας σφαλμάτων κατά Poisson

Η κατανομή Poisson αποκαλείται συχνά και κατανομή σπάνιων γεγονότων και απαντάται στη Φωτομετρία, Δευτερογενής Εκπομπή Ηλεκτρονίων, Πυρηνική και Ατομική Φυσική και σε πειράματα όπου γίνεται χρήση διαφόρων ανιχνευτών και μετρητών σωματιδίων.

Έστω ότι με τον ανιχνευτή σωματιδίων  $\alpha$  γίνονται πειράματα με ένα ραδιενεργό υλικό. Αν, ανά μονάδα χρόνου, η μέση ροή των σωματιδίων είναι  $\mu$ , τότε στην έξοδο του ανιχνευτή σωματιδίων θα εμφανιστούν ειδικά διαμορφωμένα στενοί ηλεκτρικοί παλμοί (5 V, 0,2  $\mu$ s), με μέση συχνότητα  $\mu$ . Σκοπός των πειραμάτων είναι η μέτρηση του μέσου ρυθμού ροής των σωματιδίων  $\mu$ . Για τη μέτρηση αυτή χρησιμοποιούνται όργανα 2 τύπων:

- ο καταμετρητής ρυθμού ροής παλμών (rate meter) ή
- ο καταμετρητής συνολικού αριθμού «στενών» ηλεκτρικών παλμών, (counter).

Όταν χρησιμοποιείται ο μετρητή ροής ηλεκτρικών παλμών (rate meter), κατάλληλα βαθμονομημένος στη σχέση «ρυθμός ροής-τάση εξόδου», τότε καταγράφουν το ηλεκτρικό σήμα στην έξοδό του. Διαπιστώνεται πειραματικά, ότι το σήμα στην καταγραφή υφίσταται τυχαίες διακυμάνσεις γύρω από μία μέση τιμή, με τυπική απόκλιση  $\sigma_\mu$ , γεγονός που δημιουργεί

μία αβεβαιότητα στην τιμή της  $\mu$ . Για να είναι η μέτρηση του ρυθμού ροής ακριβής, μεγάλη σημασία έχει η τυπική απόκλιση του σήματος στην καταγραφή, η οποία στην καταγραφή εκδηλώνεται ως θόρυβος του σήματος.

Γενικότερα, αν σε μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ο αναμενόμενος αριθμός γεγονότων είναι  $\mu \Delta t$ , τότε η πιθανότητα ότι σε πεπερασμένο διάστημα  $t$  θα συμβούν  $k$  γεγονότα δίνεται από την κατανομή Poisson:

$$p(k) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}, \quad (\text{Π10-1})$$

η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο  $k = \mu t$ .

Αποδεικνύεται, ότι η διασπορά της κατανομής αυτής είναι

$$D(\Delta) = \sigma^2 = \int_0^t \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \mu t. \quad (\text{Π10-2})$$

Επομένως, αν ο μέσος αριθμός των γεγονότων είναι  $\mu t$ , τότε η τυπική απόκλιση των γεγονότων αυτών είναι

$$\sigma = \sqrt{\mu t}. \quad (\text{Π10-3})$$

Στα πειράματα αυτού του είδους, αυτό που ενδιαφέρει τους πειραματικούς είναι ο λεγόμενος λόγος σήματος προς θόρυβο (signal to noise ratio), που προσπαθούν με κάθε τρόπο να βελτιώσουν. Στην προκειμένη περίπτωση ο λόγος αυτός είναι

$$R = \frac{\mu t}{\sqrt{\mu t}} = \sqrt{\mu t}. \quad (\text{Π10-4})$$

Όταν, για παράδειγμα,  $t = 1$  s, τότε για να είναι το σήμα 100 φορές μεγαλύτερο του θορύβου, (εννοούμε του «μέσου θορύβου» ή την τυπική απόκλιση  $\sigma_\mu$ ) η ροή των σωματιδίων πρέπει να είναι  $(100)^2$  ή  $10^4$  το δευτερόλεπτο. Επομένως, ροές της τάξης  $10^4$  μπορούν να μετρηθούν με «ακρίβεια» περίπου 1 %.

Όταν όμως η ροή των σωματιδίων είναι μικρή, για παράδειγμα 10/s, εδώ η τυπική απόκλιση της ροής αναμένεται να είναι

$$\sigma = \sqrt{\mu t} = \sqrt{10} \approx 3,16,$$

και επομένως η μέση (φυσιολογική ή ενδογενής) διακύμανση της ροής (από το μέσο όρο) θα είναι περίπου 32 %, που είναι μεγάλη!

Προκειμένου ο λόγος σήματος προς θόρυβο να βελτιωθεί στις μετρήσεις, το πρόβλημα του μεγάλου θορύβου το αντιμετωπίζουν με 2 τρόπους.

1. Όταν γίνεται χρήση ενός μετρητή ρυθμού ροής (rate meter), στην αναλογική έξοδο του οργάνου εμφανίζεται μία συνεχής τάση, που είναι έντονα θορυβημένη. Ο θόρυβος αυτός μειώνεται όταν αυξάνεται η σταθερά χρόνου του μετρητή, σε επίπεδα 100-300 s (δύναται να ρυθμιστεί, από 0,1 έως 1000 s). Μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η μεγάλη αδράνεια του οργάνου, το οποίο αδυνατεί να αντιδράσει στις γρήγορες μεταβολές της ροής, όταν αυτές για κάποιο λόγο υφίστανται.
2. Εναλλακτικά, αντί του μετρητή ρυθμού, χρησιμοποιείται ένας ψηφιακός καταμετρητής ηλεκτρικών παλμών (counter), στον οποίο ο χρόνος καταμέτρησης των παλμών επιλέγεται από τον ερευνητή. Εδώ για να βελτιωθεί ο λόγος σήματος προς θόρυβο, για παράδειγμα στα επίπεδα του 100, το χρονικό διάστημα καταμέτρησης αυξάνεται σε επίπεδα 1000 s, προκειμένου το γινόμενο  $\mu t$  να είναι  $10^4$  ( $N_{\text{signal}} = \mu t = 10^4$ ). Με την επιλογή  $t = 1000$  s, στο χρονικό αυτό διάστημα η μέση διακύμανση του αριθμού των σωματιδίων (τυπική απόκλιση) αναμένεται να είναι

$$\sigma = N_{\text{noise}} = \sqrt{\mu t} = \sqrt{10 \times 1000} = 100,$$

που είναι μόνο 1 % του ολικού αριθμού ( $N_{signal}$ ).

Για παράδειγμα, όταν σε 1000 s στον καταμετρητή εμφανίζονται 14432 παλμοί, τότε η μέση ροή είναι 14,43, ενώ ο αναμενόμενος θόρυβος (τυπική απόκλιση) αναμένεται να είναι:

$$\sigma = N_{noise} = \sqrt{\mu t} = \sqrt{N_{signal}} \approx 120.$$

Συνεπώς, ανά δευτερόλεπτο, η μέση ροή των σωματιδίων είναι

$$\mu = 14,43 \pm 0,12 \text{ s}^{-1},$$

όπου εδώ ο λόγος θόρυβος προς σήμα είναι βελτιωμένος και είναι:

$$N_{noise}/N_{signal} = 0,83 \text{ \%}.$$

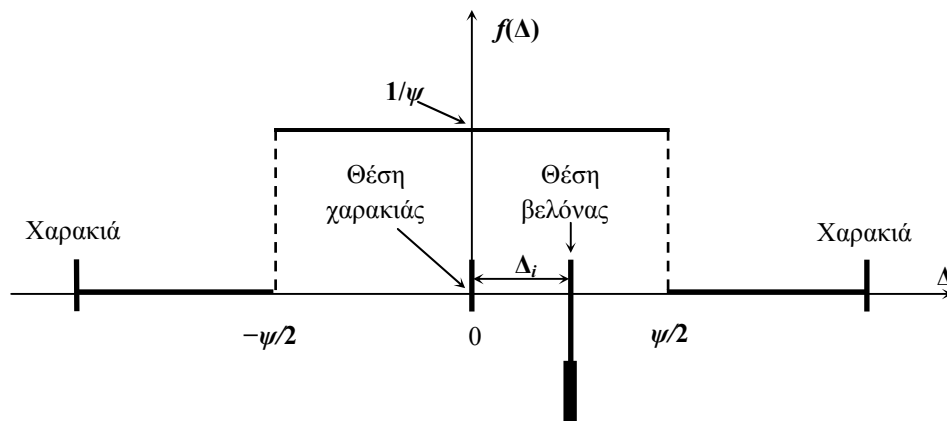
## Παράρτημα 11. Ομαλή πυκνότητα κατανομής των σφαλμάτων

Στις κοινές μετρήσεις πολύ συχνά απαντάται και η ομαλή κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων. Η κατανομή αυτή είναι χαρακτηριστική στη μέθοδο ανάγνωσης της ένδειξης με στρογγυλοποίηση, όπου ουσιαστικά γίνεται ψηφιοποίηση της συνεχούς μεταβλητής. Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής συνοδεύεται με εμφάνιση ενός σφάλματος  $\Delta_i$ , το οποίο, γενικά, είναι πάντα μικρότερο της  $\psi/2$ , όπου  $\psi$  είναι η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας του οργάνου. Ωστόσο, οι τιμές  $\Delta_i$  έχουν τυχαίο χαρακτήρα με ομαλή πυκνότητα κατανομής, καθώς ο δείκτης του αναλογικού οργάνου με ίσες πιθανότητες μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος  $-\psi/2, \psi/2$  (Σχ. 19).

Εδώ η πυκνότητα πιθανότητας σφάλματος είναι:

$$f(\Delta) = 1/\psi, \quad \text{στο διάστημα } -\psi/2 \leq \Delta \leq \psi/2,$$

$$f(\Delta) = 0, \quad \text{στα διαστήματα } -\psi/2 > \Delta > \psi/2.$$



Σχήμα 19. Ομαλή πυκνότητα κατανομής των σφαλμάτων.

Προφανώς, στο διάστημα  $[-\psi/2, \psi/2]$ , η μέση τιμή των αποκλίσεων είναι μηδέν, ωστόσο η διασπορά τους (το τετράγωνο των αποκλίσεων από τη χαρακιά) είναι:

$$D(\Delta) = \sigma^2 = \int_{-\psi/2}^{\psi/2} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\Delta^2}{\psi} d\Delta = \frac{(\psi/2)^2}{3} \quad (\text{Π11-1})$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει, ότι ως μέθοδος ανάγνωσης, το σφάλμα ψηφιοποίησης χαρακτηρίζεται με τυπική απόκλιση  $\sigma$ , η τιμή της οποίας είναι

$$\sigma = \frac{\psi}{2\sqrt{3}} = 0,288\psi, \quad (\text{Π11-2})$$

δηλαδή είναι περίπου το 1/3 της ελάχιστης υποδιαίρεσης  $\psi$ .

### Παράρτημα 12. Διάστημα σφάλματος μεγάλου αριθμού προσθετέων

Στο Παράρτημα 8, αναλύοντας το εγγυημένο διάστημα σφάλματος των  $n$  προσθετέων καταλήξαμε στη σχέση (Π8-5):

$$\varepsilon_u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n. \quad (\text{Π12-1})$$

ενώ όταν οι προσθετέοι έχουν ίδιο εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\varepsilon$ , τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\varepsilon_u = n\varepsilon. \quad (\text{Π12-2})$$

Σημειώνουμε ότι οι δύο σχέσεις πρέπει να χρησιμοποιούνται προσεκτικά, δηλαδή μόνο όταν ο αριθμός των προσθετέων είναι μικρότερος του 6.

Όταν ο αριθμός των προσθετέων είναι μεγάλος, π.χ. 20 ή 50, τότε το σφάλμα πρόσθεσης αδικαιολόγητα διογκώνεται και η σχέση (Π12-1) το παρουσιάζει αφύσικα μεγάλο, γεγονός που δημιουργείται από την υπόθεση ότι τα σφάλματα των προσθετέων έχουν μέγιστη τιμή και ίδιο πρόσημο.

Όταν ο αριθμός των προσθετέων είναι μικρός, τέτοια κατάσταση είναι πιθανή, αλλά όταν είναι μεγάλος, στη σχέση για το σφάλμα το ακριβές (σχέση Π8-3), φυσικό είναι να αναμένουμε ότι περίπου οι μισοί όροι έχουν αντίθετο πρόσημο και επομένως τα δύο σύνολα σφαλμάτων τείνουν να αλληλοαναιρεθούν.

Όταν ο αριθμός των προσθετέων είναι μεγάλος, είναι προτιμότερη η στατιστική εκτίμηση του σφάλματος και όχι η εκτίμηση κατά μέγιστα.

*Λύση.* Έστω ότι έχουμε άθροισμα  $n$  προσθετέων:

$$u = \sum_{k=1}^n a_k, \quad (\text{Π12-3})$$

όπου  $a_k$  είναι προσεγγιστικοί αριθμοί, το ακριβές σφάλμα των οποίων είναι  $\Delta_k$ :

$$\Delta_k = |A_k - a_k|.$$

Θα υποθέσουμε ακόμη, ότι έχουν οριστεί τα όρια των  $\Delta_k$ , δηλαδή γνωρίζουμε τις τιμές  $\varepsilon_k$ , όπου

$$|\Delta_k| \leq \varepsilon_k.$$

Με τις παραδοχές αυτές, το ακριβές σφάλμα του αθροίσματος είναι

$$\Delta_u = \sum_{k=1}^n \Delta_k. \quad (\text{Π12-4})$$

Για να υπολογίσουμε τη στατιστική εκτίμηση του σφάλματος στο άθροισμα, πρέπει να γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής των  $\Delta_k$ .

Θα υποθέσουμε εδώ οι τιμές  $a_k$  προέκυψαν από μετρήσεις με αναλογικά όργανα, όπου η ανάγνωση γινόταν με στρογγυλοποίηση της ένδειξης. Τότε στο διάστημα  $[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$ , το ακριβές σφάλμα  $\Delta_i$  κατανέμεται ομαλά (Σχ. 19).

Στο σημείο αυτό θα απλουστεύσουμε το πρόβλημα, υποθέτοντας ότι όλοι οι προσθετέοι έχουν ίδιο όριο σφάλματος  $\varepsilon$ . Τότε όλοι οι τυχαίοι όροι των  $\Delta_k$  θα έχουν ίδια πυκνότητα κατανομής, που στην ομαλή κατανομή είναι  $1/2\varepsilon$  (στο διάστημα  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , το εμβαδόν κάτω από την κατανομή αυτή είναι 1).

Στο διάστημα  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , ( $\varepsilon = \psi/2$ ) η διασπορά της  $\Delta_k$  είναι

$$D(\Delta_k) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \alpha^2 d\alpha = \frac{1}{3} \varepsilon^2. \quad (\text{Π12-5})$$

Επειδή στο άθροισμα (Π12-4) τα  $\Delta_k$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, αξιοποιώντας το θεώρημα της διασποράς του αθροίσματος, προκύπτει:

$$D(\Delta_u) = D\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k\right) = nD(\Delta_k) = n \frac{1}{3} \varepsilon^2. \quad (\text{Π12-6})$$

Για τη στατιστική εκτίμηση του  $\Delta_u$  μπορούμε να υποθέσουμε, ότι το άθροισμα πεπερασμένου (αλλά μεγάλου) αριθμού προσθετέων υπακούει στην κανονική κατανομή, με κέντρο το 0 και διασπορά  $n\varepsilon^2/3$ .

Συνεπώς, με πιθανότητα 68,3% (κανόνας ενός  $\sigma$ ), το ακριβές σφάλμα της πρόσθεσης δεν υπερβαίνει τον όρο

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{3}},$$

δηλαδή

$$|\Delta_u| < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{3}}. \quad (\text{Π12-7})$$

Η πιθανότητα αυξάνει στα επίπεδα 99,73%, όταν το δεξί μέρος της σχέσης (Π12-7) τριπλασιαστεί (κανόνας τριών  $\sigma$ ):

$$|\Delta_u| < \varepsilon \sqrt{3n}. \quad P = 99,73 \% \quad (\text{Π12-8})$$

Καθώς η πιθανότητα 99,73 % είναι πολύ κοντά στο 100 %, το δεξί μέρος της σχέσης (Π12-8) ουσιαστικά ταυτίζεται με την  $\varepsilon_u$ . Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε το δεξί μέρος της σχέσης (Π12-8) ως το άνω όριο του σφάλματος των  $n$  προσθετέων.

Είναι τελικά:

$$\varepsilon_u = \varepsilon \sqrt{3n}. \quad (\text{Π12-9})$$

Αν ακολουθούσαμε τη σχέση (Π12-1), για άνω όριο του σφάλματος των  $n$  προσθεταίων θα έπρεπε να σημειώναμε την τιμή  $n\varepsilon$ , η οποία είναι  $\sqrt{(n/3)}$  φορές μεγαλύτερη από τη στατιστική εκτίμηση.

Από τη πρακτική σκοπιά, από τη σχέση (Π12-9) προκύπτουν τρία σπουδαία συμπεράσματα:

1. Η στατιστική εκτίμηση του σφάλματος και η εκτίμηση κατά μέγιστα συμπίπτουν όταν

$$n = 3.$$

2. Όταν  $n < 3$ , η μέθοδος των εγγυημένων διαστημάτων ( $\varepsilon_u = n\varepsilon$ ) είναι προτιμότερη, καθώς δίνει μικρότερο «σφάλμα», το οποίο μεταξύ άλλων είναι εγγυημένο κατά 100 %.
3. Η κατάσταση διαφοροποιείται όταν  $n > 3$ . Εδώ είναι προτιμότερη η στατιστική εκτίμηση του σφάλματος, καθώς σε μεγάλα  $n$  δίνει μικρότερο σφάλμα, αλλά με μια μικρή θυσία στη σιγουριά, καθώς η πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος  $\pm \varepsilon \sqrt{3n}$  είναι 99,7 και όχι 100 %.

## Βιβλιογραφία

1. J. R. Taylor, *An introduction to Error Analysis*, Second edition, California, 1997.
2. Schigolev B.M., *Mathematical analysis of observations*, London HIFFE Books, 1965.
3. Б. М. Щиголев, *Математическая обработка наблюдений*, Издание Третье, Изд. Наука, Гл. Ред. Физико-Математической Литературы, С.С.С.Р., Москва, 1969.
4. В.Р. Demidovich, I.A. Maron, *Computational Mathematics*, Mir Publishers-Moscow, 1987.
5. Κ. Χριστοδουλίδης, Τομέας Φυσικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, ΕΜΠ, *Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων*, Έκδοση Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, Αθήνα, 2002.
6. Σ.Ε. Σιμόπουλος, *Μετρήσεις Τεχνικών Μεγεθών*, ΕΜΠ, Β' Έκδοση, 1989.
7. Τομέας Φυσικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, ΕΜΠ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*. Τόμος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999.
8. В.Г. Савенко, *Измерительная Техника*, Высшая школа, Москва 1974.
9. Ф. В. Кушнир, *Электрорадиоизмерения*, ЕНЕРГОАТОМИЗДАТ, Ленинград, 1983.

## Μερικά παραδείγματα υπολογισμού του όρου $\Delta b_{οργ}$ στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

### Γενικά

Στην εργαστηριακή πρακτική, η συνιστώσα του σφάλματος που οφείλεται στα σφάλματα των οργάνων συνήθως παραλείπεται.

Ωστόσο, στο άθροισμα

$$\Delta b_{ολικο} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ},$$

δίχως τον όρο  $\Delta b_{οργ}$ , το σφάλμα της κλίσης σε μεγάλο βαθμό υποεκτιμάται, γεγονός που πρέπει να αποτρέπεται, καθώς δημιουργεί ψευδής εικόνα πειράματος υψηλής ακρίβειας, παρότι η ακρίβεια είναι *πολύ* μικρότερη!

Θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού του όρου  $\Delta b_{οργ}$ , ενώ τον όρο  $\Delta b_{τυχ}$  θα ασχοληθούμε μόνο σε περιπτώσεις όπου παραβλέπετε το γεγονός ότι στο πείραμα δεν τηρείται ο όρος  $\sigma_y = \text{σταθερά}$

Όπως τονίσαμε πολλές φορές, όταν η διασπορά των πειραματικών σημείων *δεν είναι μηδέν* (δεν είναι αμελητέα), την κλίση της πειραματικής ευθείας την υπολογίζουμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ στον υπολογισμό του σφάλματος της κλίσης, στον όρο  $\Delta b_{οργ}$  προσθέτουμε την αβεβαιότητα  $\Delta b_{τυχ}$ , που την υπολογίζουμε κανονικά, ως τυπική απόκλιση των  $b_k$ , εφόσον της έχουμε προσδώσει πιθανότητα κάλυψης 99,73 %, πολλαπλασιάζοντας την στον κατάλληλο συντελεστή Student.

### Άσκηση 4.

#### «Προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού εκκρεμούς»

Η σχετική θεωρητική ανάλυση της μεθόδου (βλ. τον εργαστηριακό οδηγό Φυσικής, ΕΜΠ, Άσκηση 4) οδηγεί στη σχέση

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I'}{D} + \frac{M}{D} R^2,$$

όπου  $M$  είναι η συνολική μάζα των δύο μεταλλικών δίσκων,  $T$  είναι η περίοδος ταλάντωσης του στροφικού εκκρεμούς,  $R$  είναι η απόσταση των δίσκων από τον άξονα περιστροφής (σύρματος), ενώ  $I'$  είναι ένας σταθερός αριθμός, που είναι άγνωστος.

Σκοπός του πειράματος είναι η μέτρηση της κατευθύνουσας ροπής του σύρματος  $D$ , μέσω μέτρησης του λόγου  $M/D$ , ο οποίος προσδιορίζεται ως κλίση της πειραματικής ευθείας

$$y = a + bx,$$

όπου

$$x = R^2 \quad \text{και} \quad y = T^2/4\pi^2.$$

Στην εκτέλεση της Άσκησης γίνεται μέτρηση πρώτα της συνολικής μάζας  $M$ , των δύο δίσκων, με έναν ειδικό ζυγό μεγάλης ακρίβειας ( $\delta M \leq 0,1 \text{ gr}$ ), ενώ στο δεύτερο μέρος των μετρήσεων, για διάφορες τιμές  $R_i$  γίνεται μέτρηση του χρόνου **10** περιόδων ταλάντωσης, δηλαδή  $10T_i$ . Ένα ενδεικτικό παράδειγμα μετρήσεων των  $R_i$  και  $T_i$  βλέπουμε στον πίνακα που ακολουθεί:

$R, \pm 0,1$ (cm)	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0
$T, \pm 0,01$ (s)	0,78	0,88	1,02	1,18	1,39	1,57	1,79	1,99

Σημειώνουμε ότι το χρονόμετρο χειρός είναι ψηφιακό όργανο με πολύ μικρό ποσοστιαίο σφάλμα, της τάξης  $10^{-5}$ - $10^{-6}$  %. Για το λόγο αυτό, στις μετρήσεις χρόνου, για σφάλμα μέτρησης δηλώνουμε το σφάλμα των ανακλαστικών του ανθρώπου, που ως τιμή δεν υπερβαίνει τα  $\pm 0,1$  s. Συνεπώς, μία ένδειξη του οργάνου:

$$10T = 7,78 \text{ s,}$$

πρέπει να στρογγυλεύεται στα δέκατα του δευτερολέπτου και να σημειώνεται ως

$$10T = 7,8 \pm 0,1 \text{ (s),}$$

από την οποία προκύπτει η τιμή της περιόδου:

$$T = 0,78 \pm 0,01 \text{ (s).}$$

Η μέτρηση της απόστασης  $R_i$  γίνεται με έναν κανόνα (χάρακα), η ελάχιστη υποδιαίρεση του οποίου είναι 1 mm. Καθώς όμως η μέτρηση της  $R_i$  γίνεται με δυσκολία, είναι παρακινδυνευμένο να ισχυριστεί κανείς ότι η μέτρηση αυτή γίνεται με σφάλμα μικρότερο από  $\pm 0,5$  mm. Η δυσκολίας αυτή παραπέμπει σε εγγυημένο διάστημα σφάλματος  $\Delta R_i = \pm 1$  mm, που μπορούμε να το εγγυηθούμε. Τελικά, στις μετρήσεις:

$$\Delta T_i = \pm 0,01 \text{ s} \quad \text{και} \quad \Delta R_i = \pm 1 \text{ mm.}$$

Τον όρο  $\Delta b_{\text{οργ}}$  θα τον υπολογίσουμε από τη σχέση (63, σελ....):

$$\Delta b_{\text{οργ}} = \pm b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right),$$

η οποία παρήχθη για καταστάσεις όπου οι δύο μετρητές είναι αναλογικοί.

Τονίζουμε, ότι η παραπάνω εκέση είναι εφαρμόσιμη σε άμεσες μετρήσεις των μεγεθών  $x_i$  και  $y_i$ , ενώ στις έμμεσες μετρήσεις, τα μεγέθη  $\delta x_{av}$  και  $\delta y_{av}$  πρέπει πρώτα να υπολογιστούν.

Έτσι, καθώς  $\delta x_{i-av} = 2R_i \delta R_{av}$  και  $\delta y_{i-av} = 2T_i \delta T_{av}$  προκύπτει, ότι

$$\delta x_{1-av} = 2R_1 \delta R_{av} \quad \text{και} \quad \delta x_{n-av} = 2R_n \delta R_{av},$$

όπως επίσης:

$$\delta y_{1-av} = \frac{2T_1 \delta T_{av}}{4\pi^2}, \quad \text{και} \quad \delta y_{n-av} = \frac{2T_n \delta T_{av}}{4\pi^2}.$$

Στο σημείο αυτό, ο λόγος  $\Delta b_{\text{οργ}}/b$  μπορεί να υπολογιστεί:

$$\pm \frac{\Delta b_{\text{οργ}}}{b} = \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right) = \left( \frac{\frac{2T_n \delta T_{av}}{4\pi^2} + \frac{2T_1 \delta T_{av}}{4\pi^2}}{\left( \frac{T_n^2}{4\pi^2} - \frac{T_1^2}{4\pi^2} \right)} + \frac{2R_n \delta R_{av} + 2R_1 \delta R_{av}}{(R_n^2 - R_1^2)} \right) =$$

$$\left( \frac{2\delta T_{av}(T_n + T_1)}{(T_n^2 - T_1^2)} + \frac{2\delta R_{av}(R_n + R_1)}{(R_n^2 - R_1^2)} \right) = \left( \frac{2\delta T_{av}}{(T_n - T_1)} + \frac{2\delta R_{av}}{(R_n - R_1)} \right) =$$

$$\left( \frac{2 \times 0,01 \text{ s}}{(1,99 - 0,78) \text{ s}} + \frac{2 \times 0,1 \text{ cm}}{(16,0 - 2,0) \text{ cm}} \right) = 0,0165 + 0,0143 \approx 0,031 = 3,1\%$$

Τα σφάλματα ανάγνωσης των 2 οργάνων,  $\Delta T_{i-av} = \pm 0,01$  s και  $\Delta R_{i-av} = \pm 1$  mm, από μόνα τους, δημιουργούν ένα εγγυημένο διάστημα σφάλματος στην κλίση 3,1 %.

Όταν η διασπορά των τιμών  $y_i$  δεν είναι μηδέν, στο σφάλμα που προκαλούν τα δύο όργανα πρέπει να προστεθεί η αβεβαιότητα της κλίσης, δηλαδή ο όρος  $\Delta b_{\text{τυχ}}$ , ο οποίος υπολογίζεται ως  $\Delta b_{\text{τυχ}} = \sigma_b t_{n,p}$ .

**Σημείωση.** Συνήθως, τον όρο  $\sigma_b$  οι φοιτητές τον υπολογίζουν από τη σχέση

$$\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-2)} \times \frac{n}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}},$$

όπου  $d_i = y_i - a - bx_i$ . Τονίζουμε, ότι η μέθοδος αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη όταν δεν τηρείται ο όρος  $\sigma_y = \text{σταθερά}$ . Στην επιλογή  $y = T^2/4\pi^2$ , ο όρος αυτός δεν τηρείται καθώς

$$\sigma_y = (\partial y / \partial T) \sigma_T = (1/4\pi^2)(2T\sigma_T) = (1/2\pi^2)T\sigma_T.$$

Βλέπουμε, ότι εδώ η τυπική απόκλιση των  $y_i$  είναι ανάλογη των  $T_i$  και επομένως δεν είναι σταθερή. Σταθερός είναι μόνο ο όρος  $\sigma_T$ , δηλαδή η τυπική απόκλιση στη μέτρηση του χρόνου, ο οποίος έχει τυχαίο χαρακτήρα. Στη γραφική παράσταση, οι τυχαίες αποκλίσεις των  $y_i$  από τη βέλτιστη ευθεία δεν είναι ίσες σε όλο το μήκος της ευθείας. Οι αποκλίσεις είναι μικρές σε μικρές τιμές των  $T_i$ , ενώ είναι μεγάλες σε μεγάλες τιμές των  $T_i$ .

Όσο για τον όρο  $\sigma_T$ , αυτός μπορεί να μετρηθεί σε ένα ξεχωριστό πείραμα, όπου  $k$  φορές μετράνε το χρόνο, ενώ τον όρο  $\sigma_T$  τον υπολογίζουν από τη σχέση

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (T_k - \bar{T})^2}{(n-2)}}.$$

Εναλλακτικά, τον όρο  $\sigma_t$  μπορούμε να τον ορίσουμε ως το 1/3 του εγγυημένου διαστήματος στις αποκλίσεις του χρόνου, που είναι 0,01 s, ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το νέο διάστημα σφάλματος, δηλαδή το 0,01/3 s, καλύπτεται με πιθανότητα 68,3 % και παύει να είναι εγγυημένο.

Συνεπώς, θεωρούμε ότι

$$\sigma_T = 0,01/3 \text{ s.}$$

Συμπεραίνουμε τελικά, ότι την τυπική απόκλιση των  $y_i$  πρέπει να την υπολογίσουμε από τη σχέση για την τυπική απόκλιση συνάρτησης  $n$  τυχαίων μεταβλητών.

Έτσι, καθώς  $b = b(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ , για την τυπική απόκλιση των  $y_i$  ισχύει η γενική σχέση:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial b}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2$$

όπου οι μερικοί παράγωγοι στις παρενθέσεις μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση για την κλίση  $b$ :

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i) \times (\sum y_i)}{D},$$

στην οποία τον παρανομαστή τον συμβολίσαμε  $D$ .

Ο υπολογισμός αυτών των παραγώγων δίνει:

$$\frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{nx_k - \sum_{i=1}^n x_i}{D}$$

τους οποίους, αν τους αντικαταστήσουμε στη γενική σχέση, θα έχουμε τελικά

$$\sigma_b^2 = \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y1}^2}{D^2} + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{y2}^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_{yn}^2}{D^2}$$

Προφανώς, εδώ είναι περιττός ο υπολογισμός των  $d_i$ , ενώ ο υπολογισμός του  $\sigma_y^2$  γίνεται άμεσα από τον παραπάνω γενικό τύπο, ο οποίος εξειδικεύεται σε κάθε περίπτωση.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, με επιλογές  $x = R^2$  και  $y = T^2/4\pi$ , όπου

$$\sigma_{yi} = (\partial y / \partial T) \sigma_T = (2T_i / 4\pi) \sigma_T,$$

η γενική σχέση αποκτά τη μορφή:

$$\sigma_b^2 = [4\sigma_T^2] \times \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 y_1}{D^2} + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 y_2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 y_n}{D^2},$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί, αν τα  $y_i$  τα αντικαταστήσουμε με τη μέση τους τιμή

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

Η αντικατάσταση αυτή είναι δυνατή, στο βαθμό που τα  $y_i$  υπακούουν σε μία γραμμική σχέση.

Η αντικατάσταση των  $y_i$  δίνει:

$$\sigma_b^2 = [4\sigma_T^2] \times \bar{y} \times \left\{ \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2}{D^2} \right\} = [4\sigma_T^2] \times \bar{y} \times \frac{n}{D},$$

όπου  $\sigma_T$  ( $\sigma_T = 0,01/3$  s) είναι η τυπική απόκλιση στη μέτρηση των χρόνων  $T_i$ .

Εδώ είναι περιττή η αναζήτηση και υπολογισμός των  $d_i$ , όπου  $d_i = y_i - a - bx_i$ . Ο υπολογισμός της αβεβαιότητας  $\sigma_b$  γίνεται άμεσα από την παραπάνω σχέση.

Σε καταστάσεις όπου τηρείται ο όρος  $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_{y3} = \dots = \sigma_{yn} = \sigma_y$ , η σχέση για τη  $\sigma_y^2$  αποκτά τη γνώριμη μορφή που βλέπουμε στον εργαστηριακό οδηγό, αλλά και σε αυτές τις σημειώσεις:

$$\sigma_y^2 = \frac{\left[ nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_y^2}{D^2} + \frac{\left[ nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_y^2}{D^2} + \dots + \frac{\left[ nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right]^2 \sigma_y^2}{D^2} = \frac{n \left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \sigma_y^2}{D^2} = \frac{n \sigma_y^2}{D},$$

δηλαδή:

$$\sigma_b^2 = \frac{n \sigma_y^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

## Άσκηση 42.

### «Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας»

Στην Άσκηση γίνεται μέτρηση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων συναρτήσει της εφαρμοζόμενης υψηλής τάσης, σε ένα σύστημα ηλεκτροδίων που αποτελείται από μία λεπτή ακίδα ( $r = 0,1-0,2 \mu\text{m}$ ), από βολφράμιο, και έναν συλλέκτη που την περιβάλλει, οι διαστάσεις του οποίου είναι μερικά εκατοστά του μέτρου.

Οι τιμές του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής κυμαίνονται από 1 έως 1000 nA, ενώ η εφαρμοζόμενη τάση κυμαίνεται από 0 έως 7000 V. Οι μετρητές του ρεύματος και της τάσης είναι ψηφιακοί, με παραμέτρους ακρίβειας

$$\text{Accuracy (i): } \gamma_i (\%) + h_i r_i = 1 \% + 3d$$

και

$$\text{Accuracy (u): } \gamma_u (\%) + h_u r_u = 3 \% + (?),$$

αντίστοιχα.

Η σχετική θεωρητική ανάλυση του φαινομένου της ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων, που έγινε από τους Fowler-Nordheim, τους οδήγησε στη σχέση

$$i = Au^2 \exp\left(-\frac{B}{u}\right),$$

όπου  $i$  είναι το ρεύμα ηλεκτρονίων της ψυχρής εκπομπής και  $u$  είναι η εφαρμοζόμενη τάση.

Η παραπάνω σχέση αυτή γραμμικοποιείται ως:

$$\ln \frac{i}{u^2} = A - \frac{B}{u},$$

όπου

$$x = \frac{1}{u}$$

και

$$y = \ln \frac{i}{u^2}.$$

Σκοπός του πειράματος είναι ο ποιοτικός έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim και μέτρηση του συντελεστή  $B$ .

Αν ο νόμος σωστά περιγράφει την εξέλιξη του φαινομένου, αναμένεται τα πειραματικά σημεία να πέσουν πάνω σε μία ευθείας, τύπου

$$y = A + Bx,$$

η κλίση της οποίας είναι  $-B$ .

Καθώς οι 2 μετρητές είναι ψηφιακοί, η συνεισφορά των 2 οργάνων στο σφάλμα της κλίσης,  $\Delta b_{\text{орг}}$ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta b = b_{\text{πειρ}} [ |\gamma_y| + |\gamma_x| ]$$

Θυμίζουμε, ότι οι 2 σταθεροί όροι των σφαλμάτων,  $h_i r_i$  και  $h_u r_u$  δημιουργούν παράλληλη μετατόπιση της πειραματικής ευθείας και, επομένως, δεν επηρεάζουν το σφάλμα της κλίσης.

Για να υπολογιστεί η συνεισφορά των οργάνων στο σφάλμα της κλίσης,  $\Delta b_{\text{орг}}$ , πρέπει να υπολογιστεί το άθροισμα

$$(\gamma_x + \gamma_y),$$

όπου, τα μεγέθη  $\gamma_x$  και  $\gamma_y$  είναι παραγόμενα μεγέθη, με την έννοια, ότι δεν είναι των οργάνων, ωστόσο μπορούν να υπολογιστούν από τις τιμές  $\gamma_i$  και  $\gamma_u$  των 2 οργάνων.

Θα υπολογίσουμε πρώτα το  $\gamma_x$ . Έτσι, καθώς η μεταβλητή  $x$  είναι

$$x = \frac{1}{u},$$

για το σφάλμα  $\delta x$  προκύπτει η σχέση:

$$\delta x = -\frac{\delta u}{u^2} = x \left| \frac{\delta u}{u} \right| = x \gamma_u.$$

Επομένως,

$$\gamma_x = \frac{\delta x}{x} = \left| \frac{\delta u}{u} \right| = \gamma_u.$$

Συνεπώς, στις τιμές των  $x$ , το ποσοστιαίο σφάλμα είναι όσο και αυτό του μετρητή της τάσης:

$$\gamma_x = \gamma_u = 3 \text{ \%}.$$

Δυσκολότερα υπολογίζεται (αποδεικνύεται) το ποσοστιαίο σφάλμα στο  $y$ . Θα αποδείξουμε, ότι στις τιμές των  $y_k$  το ποσοστιαίο σφάλμα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\gamma_y = 0!$$

Για την απόδειξη, ως συνήθως, με κεφαλαία γράμματα θα συμβολίζουμε τις πραγματικές τιμές (τις ακριβείς), ενώ με τα πεζά θα συμβολίζουμε τις ενδείξεις των οργάνων.

Έστω ότι  $\gamma_x > 0$  και  $\gamma_y > 0$ . Καθώς οι πραγματικές και οι προσεγγιστικές τιμές συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$I = i + i\gamma_i$$

και

$$U = u + u\gamma_u,$$

για την πραγματική τιμή του λογαρίθμου, προκύπτει η σχέση:

$$Y = \ln \frac{I}{U^2} = \ln \frac{i + i\gamma_i}{(u + u\gamma_u)^2} = \ln \frac{i(1 + \gamma_i)}{u^2(1 + \gamma_u)^2} = \ln i + \ln(1 + \gamma_i) - 2 \ln u - 2 \ln(1 + \gamma_u) \approx$$

$$\ln i + \gamma_i - 2 \ln u - 2\gamma_u = \ln \frac{i}{u^2} + (\gamma_i - 2\gamma_u) = y + (\gamma_i - 2\gamma_u),$$

όπου για  $z \ll 1$ , έγινε χρήση της προσεγγιστικής σχέσης της σειράς Teilor:

$$\ln(1 + z) \approx z.$$

Τελικά, για τις πραγματικές και προσεγγιστικές τιμές των λογαρίθμων προκύπτει η σχέση

$$Y = y + (\gamma_i - 2\gamma_u) = y + \delta y.$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι πραγματικές τιμές των λογαρίθμων  $Y_k$  είναι μετατοπισμένες (εσφαλμένες) έναντι των μετρημένων  $y_k$ , ωστόσο όλες στον ίδιο βαθμό, δηλαδή κατά

$$\delta y = \gamma_i - 2\gamma_u.$$

Με άλλα λόγια, στο λογάριθμό, παρά την αλλοίωση των πραγματικών τιμών: από  $Y_k$  προς  $y_k$ , η σταθερή αυτή αλλοίωση δημιουργεί τη πραγματική ευθεία που είναι παράλληλη προς την πειραματική, αλλά μετατοπισμένη προς τις μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές, ανάλογα με την τιμή και πρόσημο του αθροίσματος  $\gamma_i - 2\gamma_u$  ( $\delta y = \pm (\gamma_i - 2\gamma_u)$ ).

Συνεπώς, καθώς η πραγματική και η πειραματική ευθείες είναι παράλληλες, συμπεραίνουμε ότι στις τιμές των  $y_k$  απουσιάζει ο ποσοστιαίος όρος του σφάλματος, γεγονός που μας επιτρέπει να τον θεωρήσουμε μηδέν:

$$\gamma_y = 0!$$

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά, η συνθήκη  $\gamma_y = 0$  προκύπτει από το γεγονός ότι στη σχέση για τις πραγματικές τιμές των λογαρίθμων, που λάβαμε, λείπει ο όρος του σφάλματος που θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως ανάλογος του  $y$ , δηλαδή όροι τύπου:

$$y\gamma_i, y\gamma_u, y(\gamma_i - \gamma_u), y(\gamma_i + \gamma_u) \text{ κ.ο.κ.}$$

Τελικά, τα ποσοστιαία σφάλματα των μεταβλητών  $x$  και  $y$  είναι

$$\gamma_x = \gamma_u,$$

και

$$\gamma_y = 0,$$

από τα οποία προκύπτει το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα σφάλματα των 2 οργάνων:

$$\Delta b_{\text{орг}} = b(\gamma_x + \gamma_y) = b\gamma_u.$$

Μένει, στο σφάλμα που προκαλούν τα δύο όργανα να προστεθεί η αβεβαιότητα της κλίσης, δηλαδή ο όρος  $\Delta b_{\text{τιχ}}$ , καθώς στο πείραμα, οι τιμές των  $y_k$  υφίστανται διασπορά. Ο όρος αυτός υπολογίζεται κανονικά, πολλαπλασιάζοντας την αβεβαιότητα  $\sigma_b$  τον στον κατάλληλο συντελεστή Student.

## Άσκηση 34.

### «Περίθλαση ηλεκτρονίων»

Στο πείραμα της Άσκησης, δύο ομόκεντροι κύκλοι περίθλασης σχηματίζονται στην επιφάνεια μίας γυάλινης σφαίρας, η διάμετρος των οποίων εξαρτάται από τη κρυσταλλική σταθερά  $d$ , αλλά και από την εφαρμοζόμενη υψηλή τάση στο τηλεβόλο ηλεκτρονίων (electron gun).

Η σχετική θεωρητική ανάλυση του θέματος οδηγεί στη σχέση

$$\frac{6,125 \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{\sin \theta} = d\sqrt{u},$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία περίθλασης,  $u$  είναι η εφαρμοζόμενη τάση και  $d$  είναι μία κρυσταλλική σταθερά, τις ισόπλευρης και εξάγωνης κυψέλης των ατόμων άνθρακα στα φύλλα του πολυκρυσταλλικού γραφίτη.

Ο πρώτος σκοπός του πειράματος είναι να ελεγχθεί πειραματικά αν ισχύει η υπόθεση Ντεμπρολί. Ισοδύναμα, να ελεγχθεί αν τα πειραματικά σημεία  $x_i$  και  $y_i$  δημιουργούν μία ευθεία, τύπου

$$y_i = bx_i,$$

όπου

$$x_i = \sqrt{u_i} \left( \sqrt{V} \right)$$

και

$$y_i = \frac{6,125 \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{\sin \theta_i}.$$

Στο πείραμα, η γωνία περίθλασης  $\theta$  προσδιορίζεται έμμεσα, μέσω μέτρησης του τόξου  $s$ , του αντίστοιχου κύκλου που δημιουργείται στην επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας, αξιοποιώντας τη σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη:

$$\theta_i = \frac{s_i}{4D},$$

Εδώ  $D$ , είναι η διάμετρος της σφαίρας ( $D = 13,5 \pm 0,2$  (cm)).

Καθώς οι γωνίες περίθλασης  $\theta_i$  είναι μικρές (σε τάση  $u = 1500$  V:  $\lambda = 0,3163$  Å,  $\sin\theta = 0,1286$ , ενώ  $\theta = 0,1289$ , επομένως με καλή προσέγγιση  $\sin\theta_i \approx \theta_i$ ) για τις τιμές των  $y_i$  προκύπτει η προσεγγιστική σχέση

$$y_i = \frac{6,125 \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{\sin \theta_i} \approx \frac{6,125 \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{\theta_i} = \frac{4D \times 6,125 \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{s_i} = 24,5 \times \frac{D}{s_i} \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right).$$

Ο υπολογισμός θα γίνει για μία ενδεικτική σειρά μετρήσεων, όπου η πρώτη μέτρηση του τόξου  $s$  γίνεται στη τάση 1500 V, ενώ η  $n$ -οστή, στη τάση 4500 V:

$$u_1 = 1500 \text{ V} \quad \rightarrow \quad s_1 = 7,0 \text{ cm}$$

και

$$u_n = 4500 \text{ V} \quad \rightarrow \quad s_n = 4,0 \text{ cm}$$

Σε προσέγγιση μηδενικής διασποράς των πειραματικών σημείων, η πρόχειρη εκτίμηση της κλίσης της πειραματικής ευθείας μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} = \frac{\frac{4D \times 6,125}{s_n} - \frac{4D \times 6,125}{s_1}}{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}} = \frac{4D \times 6,125 \left( \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_1} \right)}{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}} =$$

$$\frac{4 \times 13,5 \times 6,125 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{\sqrt{4500} - \sqrt{1500} \left( \sqrt{V} \right)} = \frac{35,43 \left( \overset{\circ}{\text{Å}} \times \sqrt{V} \right)}{28,35 \sqrt{V}} = 1,25 \overset{\circ}{\text{Å}}.$$

όπου  $D$  και  $s$  είναι σε cm. Βλέπουμε, ότι παρά τη προχειρότητα αυτού του υπολογισμού, η τιμή που δίνει είναι πολύ κοντά στην πραγματική, που είναι  $1,23$  Å.

Ως προς τα σφάλματα - τα σφάλματα στην τάση και στα τόξα σημειώνονται ως:

$$\delta u_{ολικο} = \delta u_{κvp} + \delta u_{av} = \delta u_{κvp} + 0 = \psi_u/2 = 50 \text{ V} \quad (\delta u_{av} \leq 0,1\psi_u \approx 0)$$

και

$$\delta s_{ολικο} = \delta s_{κvp} + \delta s_{av} \approx \delta s_{av} = \pm 0,2 \text{ cm}, \quad (\delta s_{κvp} \leq 0,01 \text{ cm} \approx 0),$$

αντίστοιχα, καθότι στο μετρητή της τάσης, η τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεση είναι 100 V, ενώ κατά τη διάρκεια του πειράματος καταβάλλεται προσπάθεια το σφάλμα ανάγνωσης της τάσης να είναι σχεδόν 0 (μεριμνάτε ο δείκτης να πέφτει πάνω στη χαρακιά «ακριβώς»).

Τονίζουμε, ότι στη παράσταση

$$\delta u = \psi_u/2 = 50 \text{ V},$$

που παριστάνει το κύριο σφάλμα του αναλογικού μετρητή τάσης, το σύμβολο  $\pm$  παραλείπεται, καθότι το σφάλμα αυτό έχει ίδια τιμή και πρόσημο σε όλες τις τιμές της τάσης! Στους υπολογισμούς, είναι βολικό το κύριο σφάλμα να το θεωρούμε θετικό.

Ο Δεύτερος σκοπός του πειράματος περιλαμβάνει τη μέτρηση της σταθεράς του πολύκρυσταλλικού γραφίτη  $d$ , όπως και του σφάλματός της,  $\delta d$ , που ισοδυναμεί με μέτρηση της κλίσης της πειραματικής ευθείας:

$$y = bx,$$

όπως και του σφάλματός  $\delta b$ .

Στο πείραμα της Άσκησης, οι 2 μετρητές είναι αναλογικοί. Ως εκ τούτου, η συνεισφορά των οργάνων στο σφάλμα της κλίσης υπολογίζεται από τη σχέση (63, σελ. ...)

$$\Delta b_{org} = \pm b \left( \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av})}{(x_n - x_1)} \right)$$

με μία όμως διαφορά, που αφορά τον αριθμητή του δεύτερου κλάσματος.

Γενικότερα, στη σχέση αυτή, οι μετρήσεις των  $x_i$  θεωρούνται άμεσες, γεγονός που οδηγεί στην εξάλειψη του κύριου σφάλματος στον αριθμητή, καθώς αυτός έχει ίδια τιμή και πρόσημο σε όλες τις τιμές των  $x_i$ . Εδώ πρέπει να προσέξει κανείς ένα λεπτό σημείο.

Στο πείραμα, μεριμνάτε, οι μετρήσεις των τάσεων  $u_i$  να γίνονται με σφάλμα ανάγνωσης 0. Είναι όμως λάθος να θεωρήσουμε ότι ο αριθμητής του δεύτερου όρου είναι μηδέν, καθώς τα μεγέθη  $x_i$  είναι παραγόμενα μεγέθη, που υπολογίζονται από τις τιμές των τάσεων  $u_i$ , τα σφάλματα των οποίων έχουν σταθερό πρόσημο και τιμή. Ενώ το σφάλμα ανάγνωσης των  $u_i$ , είναι μηδέν, στο προσκήνιο του σφάλματος των  $x_i$  εμφανίζεται το κύριο σφάλμα του μετρητή τάσης, το οποίο δεν εξαλείφεται στις τιμές των  $x_i$ . Με άλλα λόγια, το  $\delta u_{κνρ}$ , παρότι έχει σταθερό πρόσημο και τιμή σε όλες τις τάσεις  $u_i$ , δεν παράγει ίδια μεγέθη παραγόμενων σφαλμάτων στα σημεία  $x_1$  και  $x_n$ , δηλαδή:

$$\delta x_{1-κνρ} \neq \delta x_{n-κνρ},$$

καθότι

$$\delta x_{1-κνρ} = \frac{\delta u_{κνρ}}{2\sqrt{u_1}}, \quad \text{ενώ} \quad \delta x_{n-κνρ} = \frac{\delta u_{κνρ}}{2\sqrt{u_n}}.$$

Συνεπώς, εδώ η σχέση για το σφάλμα στην κλίση πρέπει να σημειωθεί ως:

$$\Delta b_{org} = \pm b \left( \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} + \frac{\delta x_{1-κνρ} - \delta x_{n-κνρ}}{x_n - x_1} \right).$$

Μένει να υπολογιστούν τα σφάλματα στους δύο αριθμητές. Έτσι, καθώς τα μεγέθη  $x_i$  και  $y_i$  ορίζονται ως

$$x_i = \sqrt{u_i} \quad \text{και} \quad y_i = \frac{4D \times 6,125}{\theta_i},$$

για τα σφάλματα  $\delta x_i$  και  $\delta y_i$  προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\delta x_i = \frac{\delta u_{κνρ}}{2\sqrt{u_i}} \quad \text{και} \quad \delta y_i = y_i \left( \frac{\delta D}{D} + \frac{\delta s_{av}}{s_i} \right),$$

από τις οποίες έχουμε τις σχέσεις

$$\delta x_{1-κνρ} = \frac{\delta u_{κνρ}}{2\sqrt{u_1}}, \quad \delta x_{n-κνρ} = \frac{\delta u_{κνρ}}{2\sqrt{u_n}}$$

και

$$\delta y_{n-av} = y_n \left( \frac{\delta D}{D} + \frac{\delta s_{av}}{s_n} \right), \quad \delta y_{1-av} = y_1 \left( \frac{\delta D}{D} + \frac{\delta s_{av}}{s_1} \right).$$

Στο σημείο αυτό, ο λόγος  $\Delta b_{org}/b$  μπορεί να υπολογιστεί!

Ωστόσο, αν επιθυμούμε να διερευνήσουμε τη συνεισφορά σφάλμα οργάνου των όρων  $\delta s_{av}$ ,  $\delta u_{κvp}$  και  $\delta D$  στο (ποιος όρος συμβάλει λιγότερο, περισσότερο, μέτρια κ.λπ.) είναι προτιμότερο τη σχέση του σφάλματος να την επεξεργαστούμε μερικώς, προκειμένου στη νέα αλγεβρική παράσταση η συνεισφορά των σφαλμάτων να διαχωριστεί. Ο διαχωρισμός αυτός είναι πολύ χρήσιμος και στη φάση προγραμματισμού του πειράματος, καθώς επιτρέπει να δοθεί η δέουσα προσοχή στα μεγέθη που περισσότερο επηρεάζουν το  $\Delta b_{οργ}$ .

Ο διαχωρισμός των σφαλμάτων επιτυγχάνεται με απλή αντικατάσταση των όρων:  $\delta x_{1-κvp}$ ,  $\delta x_{n-κvp}$ ,  $y_{n-av}$  και  $y_{1-av}$  στη σχέση του σφάλματος:

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{(\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av})}{(y_n - y_1)} + \frac{(\delta x_{1-κvp} - \delta x_{n-κvp})}{(x_n - x_1)} = \frac{y_n \frac{\delta D}{D} + \frac{y_n}{s_n} \delta s_{av} + y_1 \frac{\delta D}{D} + \frac{y_1}{s_1} \delta s_{av}}{\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_1}} + \frac{\frac{\delta u_{κvp}}{2\sqrt{u_1}} - \frac{\delta u_{κvp}}{2\sqrt{u_n}}}{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}} =$$

$$\frac{\delta s_{av} \left( \frac{1}{s_n^2} + \frac{1}{s_1^2} \right) + \frac{\delta D}{D} \left( \frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_1} \right)}{\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_1}} + \frac{\delta u_{κvp}}{2\sqrt{u_2 u_1}} = \frac{\delta s_{av} \left( \frac{s_1}{s_n} + \frac{s_n}{s_1} \right) + \frac{\delta D}{D} (s_n + s_1)}{s_1 - s_n} + \frac{\delta u_{κvp}}{2\sqrt{u_n u_1}} =$$

$$\frac{0,2 \left( \frac{7}{4} + \frac{4}{7} \right) + \frac{0,2}{13,5} (7+4)}{7-4} + \frac{50}{2} \times \frac{1}{\sqrt{4500 \times 1500}} = 0,209 + 0,0096 = 0,2186 \leq 0,22 \rightarrow 22\%.$$

Τελικά, η συμβολή των οργάνων στο σφάλμα της κλίσης είναι 22 %, ενώ σε απόλυτες τιμές (όχι σχετικές), το σφάλμα οργάνων είναι

$$\Delta b_{οργ} = 0,22b.$$

Από την ανάλυση αυτή προκύπτει το συμπέρασμα ότι το μεγαλύτερο μέρος του σφάλματος προέρχεται από τις μετρήσεις των τόξων  $s_i$ , καθώς εισάγουν ένα σφάλμα περίπου 21 % (!).

Στον προγραμματισμό του πειράματος, αν επιθυμούμε να αυξήσουμε της ακρίβεια του αποτελέσματος, πρέπει να ασχοληθούμε πρωτίστως με το μεγάλο σφάλμα στις μετρήσεις των τόξων  $s_i$  και, δευτερευόντως, με το σφάλμα στο βολτόμετρο, το οποίο στο  $\Delta b_{οργ}$  συμβάλει περίπου 1 % (0,0096), που είναι 21 φορές (!!!) μικρότερο από αυτό των τόξων.

## Άσκηση 2

### «Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο φυσικού εκκρεμούς»

Η σχετική ανάλυση της μεθόδου μέτρησης οδηγεί στη σχέση

$$\frac{LT^2}{4\pi^2} = \frac{K_c^2}{g} + \frac{1}{g} L^2,$$

όπου  $K_c$  είναι σταθερά,  $T$  είναι η περίοδος ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς και  $L$  είναι η απόσταση του σημείου ανάρτησης από το κέντρο μάζας της ράβδου.

Η σχέση αυτή έχει μορφή

$$y = a + bx,$$

όπου

$$y = \frac{LT^2}{4\pi^2}, \quad x = L^2 \quad \text{και} \quad b = \frac{1}{g}.$$

Στο πείραμα, για διάφορες τιμές  $L_i$  γίνεται μέτρηση των περιόδων ταλάντωσης  $T_i$ , όπου το εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις περιόδους,  $T_i$ , είναι  $\pm 0,01$  s, ενώ στις τιμές των αποστάσεων,  $L_i$ , είναι  $\pm 1$  mm. Συνεπώς,  $\delta T_i = \pm 0,01$  s και  $\delta L_i = \pm 1$  mm. Τα σφάλματα αυτά καλύπτονται με πιθανότητα 100 %, αλλά μπορούν να έχουν πρόσημο συν (+) ή πλην (-).

Για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των δύο 2 οργάνων στο σφάλμα της κλίσης, θα καταφύγουμε στη σχέση (63, σελ. ...):

$$\frac{\Delta b_{\text{οργ}}}{b} = \pm \left( \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{x_n - x_1} \right),$$

όπου

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1},$$

ενώ στους αριθμητές, τα σφάλματα παράγονται από τα σφάλματα ανάγνωσης  $\delta L_{av}$  και  $\delta T_{av}$ , παρότι το χρονόμετρο, είναι όργανο ψηφιακό!

Έτσι, καθώς το μέγεθος  $x$  ορίζεται ως  $x = L^2$ , για τα σφάλματα  $\delta x_{1-av}$  και  $\delta x_{n-av}$  προκύπτουν οι σχέσεις

$$\delta x_{1-av} = 2L_1 \delta L_{av}.$$

και

$$\delta x_{n-av} = 2L_n \delta L_{av}.$$

Επίσης, καθώς το μέγεθος  $y$  ορίζεται ως

$$y = \frac{LT^2}{\pi^2},$$

για τα σφάλματα  $\delta y_{1-av}$  και  $\delta y_{n-av}$  προκύπτουν οι σχέσεις

$$\delta y_{1-av} = \frac{L_1 T_1^2}{4\pi^2} \delta L_{av} + \frac{L_1 2T_1}{4\pi^2} \delta T_{av}$$

και

$$\delta y_{n-av} = \frac{L_n T_n^2}{4\pi^2} \delta L_{av} + \frac{L_n 2T_n}{4\pi^2} \delta T_{av}.$$

Στο σημείο αυτό, ο λόγος  $\Delta b_{\text{οργ}}/b$  μπορεί να υπολογιστεί!

Αν επιθυμούμε να διαχωρίσουμε τη συνεισφορά των σφαλμάτων,  $\delta L_{av}$  και  $\delta T_{av}$ , είναι προτιμότερο τη σχέση σφάλματος να την επεξεργαστούμε.

Η αντικατάσταση των όρων  $\delta x_{1-av}$ ,  $\delta x_{n-av}$ ,  $\delta y_{1-av}$  και  $\delta y_{n-av}$  στη σχέση (63), δίνει:

$$\pm \frac{\Delta b_{\text{οργ}}}{b} = \left( \frac{\delta y_{n-av} + \delta y_{1-av}}{y_n - y_1} + \frac{\delta x_{n-av} + \delta x_{1-av}}{x_n - x_1} \right) = \frac{\delta L_{av}(T_n^2 + T_1^2) + 2\delta T_{av}(L_n T_n + L_1 T_1)}{L_n T_n^2 - L_1 T_1^2} + \frac{2\delta L_{av}(L_n + L_1)}{L_n^2 - L_1^2} =$$

$$\frac{\delta L_{av}(T_n^2 + T_1^2) + 2\delta T_{av}(L_n T_n + L_1 T_1)}{L_n T_n^2 - L_1 T_1^2} + \frac{2\delta L_{av}}{L_n - L_1}$$

Ενδεικτικά, στην πρώτη μέτρηση, για μήκος  $L_1 = 4,0$  cm, η περίοδος ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς ήταν

$$T_1 = 2,2 \text{ s},$$

ενώ στην τελευταία μέτρηση, σε μήκος  $L_n = 38,0$  cm, η περίοδος ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς ήταν

$$T_n = 1,4 \text{ s}.$$

Καθώς τα σφάλματα  $\delta T_{av}$  και  $\delta L_{av}$  είναι

$$\delta T_{av} = \pm 0,01 \text{ s}$$

και

$$\delta L_{av} = \pm 0,1 \text{ cm,}$$

για το σχετικό «σφάλμα» του  $\Delta b_{οργ}$  προκύπτει η τιμή

$$\pm \frac{\Delta b_{οργ}}{b} = \left( \frac{\delta L_{av}(T_n^2 + T_1^2) + 2\delta T_{av}(L_n T_n + L_1 T_1)}{L_n T_n^2 - L_1 T_1^2} + \frac{2\delta L_{av}}{L_n - L_1} \right) =$$

$$\frac{0,1(1,4^2 + 2,2^2) + 0,02(38,0 \times 1,4 + 4,0 \times 2,2)}{38,0 \times 1,4^2 - 4,0 \times 2,2^2} + \frac{0,2}{38,0 - 4,0} = 0,03482 + 0,005882 = 0,0407 \approx 4,1\%.$$

Επομένως, τα σφάλματα των δύο μετρητών, στο σφάλμα της κλίσης συμβάλουν κατά 4,1% ή, ενώ σε απόλυτες τιμές, κατά

$$\Delta b_{οργ} = \pm 0,041b.$$

Σε περίπτωση μη μηδενικής διασποράς των πειραματικών σημείων ( $\sigma_y \neq 0$ ), η τιμή της κλίσης υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ στο  $\Delta b_{οργ}$  προσθέτουμε την *αβεβαιότητα* της κλίσης:  $\Delta b_{τοχ} = t_{np}\sigma_b$ .

**Σημείωση.** Για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας  $\Delta b_{τοχ} = t_{np}\sigma_b$ , βλέπε τις σημειώσεις 1 και 2 της Άσκηση 4.

## Άσκηση 32

### «Βαθμονόμηση θερμοζεύγους»

Στην Άσκηση γίνεται βαθμονόμηση του θερμοζεύγους τύπου *Chromel-Constantan*. Για το σκοπό αυτό, σε διάφορες θερμοκρασίες μετράνε την τάση που παράγει το θερμοζεύγος.

Η μέτρηση της τάσης γίνεται με ένα ψηφιακό βολτόμετρο 4,5 ψηφίων, στην κλίμακα των 200 mV, όπου οι παράμετροι ακρίβειας του οργάνου είναι

$$\text{Accuracy (u): } \gamma_u + h_u r_u = 0,05 \% + 3r_u.$$

Επομένως εδώ:

$$\gamma_u = 0,0005, \quad h = 3 \quad \text{και} \quad r_u = 0,01 \text{ mV}.$$

Η μέτρηση της θερμοκρασίας γίνεται με ένα ψηφιακό θερμόμετρο, που έχει διακριτική ικανότητα  $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ , ενώ το εγγυημένο διάστημα σφάλματος είναι  $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , που είναι 5 φορές μεγαλύτερο από τη διακριτική ικανότητα.

Η κατασκευάστρια εταιρεία δεν αναφέρει το ποσοστιαίο σφάλμα του θερμόμετρου, γεγονός που μας αναγκάζει να το θεωρήσουμε 0! Επομένως  $\gamma_\theta = 0!$

Στο πείραμα της Άσκησης, ζητείται να συμπληρωθεί ο πίνακας:

$$T_{αναφοράς} = ( \quad ) \pm 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$$

$T(^\circ\text{C})$ $\pm 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$	20	25	30	35	...	80	85	90
$u$ (mV)					...			
$\Theta = (T - T_{av})$ $\pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$					...			

ενώ στην επεξεργασία, ζητείται να υπολογιστούν οι διαφορές

$$\Theta = T - T_{\text{αναφοράς}}$$

Επίσης, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ζητείται να υπολογιστεί και η σταθερά  $b$  του θερμοζεύγους, τιμή και σφάλμα, της γραμμικής σχέσης

$$u = b\Theta.$$

Προσέχουμε, ότι οι τιμές  $\Theta_i = T_i - T_{\text{αναφοράς}}$  είναι απαλλαγμένες από το κύριο σφάλμα του θερμομέτρου, δηλαδή τα  $\pm 0,5$  °C, καθώς οι τιμές της διαφοράς μετρήθηκαν με τον ίδιο μετρητή. Όπως τονίσαμε πολλές φορές, στις διαφορές αυτές το κύριο σφάλμα του οργάνου απαλείφεται, ενώ για εγγυημένο διάστημα σφάλματος μπορούμε να δηλώσουμε τη διακριτική ικανότητα του μετρητή, που είναι  $\pm 0,1$  °C (!)

Στο θερμομέτρο, το ποσοστιαίο σφάλμα δεν αναφέρεται, ενώ το κύριο σφάλμα του οργάνου, δηλαδή το  $0,5$  °C, έχει σταθερό πρόσημο και τιμή. Οι ιδιότητες αυτές παραπέμπουν στο σφάλμα ενός αναλογικού οργάνου, με κύριο σφάλμα  $0,5$  °C και σφάλμα «ανάγνωσης»  $\pm 0,1$  °C.

Επομένως στην ανάλυση, είναι σκόπιμο να καταφύγουμε στην περίπτωση μικτών οργάνων, με ψηφιακό μετρητή των  $y_i$  και αναλογικό των  $x_i$ . Η σχετική ανάλυση αυτής της περίπτωσης οδηγεί στη σχέση (69, σελ. ...):

$$\frac{\Delta b_{\text{οργ}}}{b} = \pm \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{x_n - x_1} \right) = \pm \left( \gamma_y + \frac{\psi_x}{x_n - x_1} \right).$$

Στη διαφορά:

$$\Theta_n - \Theta_1 = 50$$
 °C,

το σχετικό σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα 2 όργανα είναι

$$\pm \frac{\Delta b_{\text{οργ}}}{b} = \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{x_n - x_1} \right) = 0,05\% + \frac{2 \times 0,1}{50} = 0,05\% + 0,4\% = 0,45\%.$$

Συμπεραίνουμε, ότι το μεγαλύτερο μέρος του σχετικού σφάλματος στην κλίση προέρχεται από το σφάλμα μέτρησης της θερμοκρασίας, το οποίο είναι 8 φορές μεγαλύτερο από αυτό του βολτόμετρου.

Τέλος, στο σφάλμα που προκαλούν τα δύο όργανα πρέπει να προστεθεί η αβεβαιότητα της κλίσης  $b$ , δηλαδή ο όρος  $\Delta b_{\text{τυχ}}$ , καθώς στις τιμές των  $y_i$  παρατηρείται διασπορά.

## Άσκηση 14. Μέτρηση του λόγου $e/m$ των ηλεκτρονίων

### 14.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

Στην Άσκηση, η μέτρηση του λόγου  $e/m$  γίνεται σε μία ηλεκτρονική λυχνία, όπου μία δέσμη ηλεκτρονίων, που επιταχύνθηκαν με διαφορά δυναμικού  $U_a$ , διαγράφει κύκλο με ακτίνα  $r$ , σε κάθετο μαγνητικό πεδίο των πηνίων Helmholtz, που διαρρέονται με ρεύμα  $I$ . Η σχετική ανάλυση οδηγεί στη σχέση εργασίας:

$$\frac{e}{m} = \frac{250R^2}{64\mu_0^2 N^2} \times \frac{U_a}{r^2 I^2} \left( \frac{\text{C}}{\text{kg}} \right),$$

στην οποία τα μετρούμενα μεγέθη είναι η τάση  $U_a$ , η ακτίνα του κύκλου  $r$  και το ρεύμα  $I$  που διαρρέει τα πηνία.

Η μέτρηση του λόγου  $e/m$  γίνεται με 2 τρόπους, σε 2 ξεχωριστά πειράματα.

**Στο πρώτο πείραμα**, με σταθερή τάση επιτάχυνσης 200 V, γίνεται μέτρηση του ρεύματος,  $I$ , όπου η δέσμη των ηλεκτρονίων σχηματίζει κύκλο με διάμετρο 9,0 cm. Το πείραμα αυτό επαναλαμβάνεται 7 φορές, προκειμένου να βελτιωθεί η ακρίβεια μέτρησης του ρεύματος  $I$ .

**Στο δεύτερο πείραμα**, η μέτρηση του λόγου  $e/m$  γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όπου η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος αναμένεται να είναι καλύτερη.

Στο δεύτερο πείραμα η τάση επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων μεταβάλλεται από 160 έως 260 V, ενώ κάθε φορά σημειώνεται η τιμή του ρεύματος  $I$ , που η δέσμη των ηλεκτρονίων σχηματίζει κύκλο με διάμετρο 9,0 cm.

### Επεξεργασία Πειράματος 1

**Στο Πείραμα 1**, ο λόγος  $e/m$  υπολογίζεται από τη παραπάνω σχέση, η οποία με την αντικατάσταση των όρων  $R = 0,15$  m,  $N = 130$  και  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, η σχέση αυτή γίνεται

$$\frac{e}{m} = \frac{250R^2}{64\mu_0^2 N^2} \times \frac{U_a}{r^2 I^2} = 3,2933 \times 10^6 \times \frac{U_a}{r^2 I^2} \quad \left( \frac{\text{C}}{\text{kg}} \right),$$

όπου η ανοδική τάση,  $U_a$ , είναι σε μονάδες V, η ακτίνα του κύκλου,  $r$ , σε m και το ρεύμα των πηνίων,  $I$ , σε μονάδες A.

Τη σχέση αυτή θα την αποκαλούμε *βασική σχέση εργασίας*.

Καταρχάς, από τη σχέση εργασίας προκύπτει το σχετικό σφάλμα του λόγου  $e/m$ , το οποίο είναι

$$\delta_{e/m} = \frac{\Delta(e/m)}{e/m} = \frac{\Delta U_a}{U_a} + 2 \frac{\Delta I_{ολ}}{\bar{I}} + 2 \frac{\Delta r}{r},$$

όπου:

- το «σφάλμα» στην τάση  $U_a$ ,  $\Delta U_a$ , υπολογίζεται από την τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης του αναλογικού βολτόμετρου ( $\psi_u = 10$  V).
- το «σφάλμα» στη διάμετρο του βέλτιστου κύκλου (9,0 cm) σημειώνεται ως  $\pm 2$  mm.
- το «σφάλμα» του ρεύματος,  $\Delta I$ , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta I_{ολ} = \Delta I_{οργ} + \Delta I_{τυχ} \quad (P \geq 99,7 \%),$$

όπου οι δύο όροι προσδιορίζονται χωριστά, θεωρώντας τον άλλο μηδέν.

1. Το σφάλμα  $\Delta I_{οργ}$  υπολογίζεται από τις μετρολογικές σταθερές του ψηφιακού μετρητή:

$$\text{Accuracy (I, d.c.): } 2,5 \% + 5r,$$

οι οποίες είναι

$$\Delta I_{οργ} = 0,025 \bar{I} + 5 \times 0,01.$$

- το σφάλμα  $\Delta I_{τυχ}$  υπολογίζεται κανονικά, δηλαδή ως τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής,  $\sigma_\mu$ , πολλαπλασιαζόμενο επί το συντελεστή Student  $t_{n,p}$  ( $\Delta I_{τυχ} = \sigma_\mu t_{n,p}$ ). Για  $n = 7$  και  $P = 99,73 \%$ , ο συντελεστής αυτός είναι 4,90 (βλ. Πίνακα συντελεστών Student).

Τέλος, το σφάλμα του λόγου  $e/m$  υπολογίζεται από το σχετικό «σφάλμα» της σχέσης εργασίας:

$$\Delta(e/m) = \frac{e}{m} \times \delta_{e/m}. \quad (14.8)$$

Το τελικό αποτέλεσμα σημειώνετε σε μορφή

$$e/m = (\text{τιμή}) \pm \Delta(e/m)$$

### Επεξεργασία του Πειράματος 2

**Στο πείραμα 2**, ο λόγος  $e/m$  προσδιορίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, όπου στο σφάλμα της κλίσης της βέλτιστης πειραματικής ευθείας συμβάλουν μόνο το σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού μετρητή τάσης («0»), όπως και το ποσοστιαίο σφάλμα του ψηφιακού μετρητή ρεύματος  $\gamma$  ( $\gamma = 2,5 \%$ ). Τα άλλα δύο μεγάλα σφάλματα, δηλαδή το «σφάλμα»  $hr$  ( $5r$ ) του ψηφιακού μετρητή και το «σφάλμα»  $\varepsilon_{\text{κρρ}}$  του αναλογικού οργάνου ( $\psi_w/2 = 5 \text{ V!}$ ) η μέθοδος κλίσης τα αποβάλλει.

Έτσι, από την κλίση  $b$  της πειραματικής ευθείας

$$I = b\sqrt{U_a},$$

όπου  $y = I$  και  $x = \sqrt{U_a}$ , ο λόγος  $e/m$  υπολογίζεται από τη σχέση για το  $b^2$ :

$$b^2 = \frac{I^2}{U_a} = \frac{m}{e} \times \frac{250R^2}{64r^2\mu_0^2N^2},$$

η λύση της οποίας, για το λόγο  $e/m$  δίνει μία νέα και βολική σχέση εργασίας, της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων:

$$\frac{e}{m} = \frac{250R^2}{64\mu_0^2N^2} \times \frac{1}{b^2r^2} = \frac{1}{b^2} \times 16,263 \times 10^8 \frac{\text{C}}{\text{kg}} \quad (r = 0,045 \text{ m}).$$

Το σφάλμα του λόγου  $e/m$ ,  $\Delta(e/m)$ , υπολογίζεται από το σχετικό σφάλμα της προηγούμενης σχέσης:

$$\frac{\Delta(e/m)}{e/m} = 2 \frac{\Delta b_{\text{ολ}}}{b} + 2 \frac{\Delta r}{r}.$$

Τελικά, το εγγυημένο διάστημα σφάλματος του λόγου υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta(e/m) = \frac{e}{m} \times \left( 2 \frac{\Delta b_{\text{ολ}}}{b} + 2 \frac{\Delta r}{r} \right),$$

όπου ο όρος  $2\Delta r/r$  υπολογίστηκε στο Πείραμα 1, ενώ ο όρος  $\Delta b_{\text{ολ}}$  είναι το ολικό σφάλμα στον υπολογισμό της κλίσης  $b$ , στο οποίο συμβάλουν τα σφάλματα των 2 οργάνων, αλλά και η αβεβαιότητα της κλίσης  $b$ , λόγω διασποράς των πειραματικών σημείων:

$$\Delta b_{\text{ολ}} = \Delta b_{\text{οργ}} + \Delta b_{\text{τυχ}}, \quad (P \geq 99,7 \%), \quad (13)$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη βασική αρχή της Μετρολογίας, τα σφάλματα των δύο όρων τα προσθέτουμε αριθμητικά, εφόσον στην αβεβαιότητα του τυχαίου σφάλματος προσδίνεται πιθανότητα κάλυψης 99,7%.

**$\Delta b_{\text{οργ}}$  στη συνάρτηση τύπου  $y = bx$ . Προσέγγιση  $\Delta b_{\text{τυχ}} = 0$ .**

Όταν εξετάζουμε τον όρο  $\Delta b_{\text{οργ}}$ , τα πειραματικά σημεία  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \dots (x_n, y_n)$  τα φανταζόμαστε να πέφτουν πάνω σε μία ευθεία ακριβώς. Ωστόσο, λόγω σφαλμάτων των οργάνων, η κλίση αυτής της ευθείας, που την αποκαλούμε πειραματική ( $b$ ), αναμένουμε να διαφέρει «ελαφρώς» από αυτή της πραγματικής,  $B$ , κατά  $\Delta b_{\text{οργ}}$ . Η παραδοχή αυτή μας επιτρέπει την κλίσης της πειραματικής ευθείας να την υπολογίσουμε από το ηγλικό

$$b = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1},$$

ενώ στην ανάλυση του σφάλματος που προκαλούν τα δύο όργανα να περιλάβουμε μόνο τα 2 οριακά πειραματικά σημεία: το σημείο  $(x_1, y_1)$  και το σημείο  $(x_n, y_n)$ .

Γενικότερα, σε άμεσες μετρήσεις των  $y_i$  και  $x_i$ , όπου ο μετρητής των  $y_i$  είναι ψηφιακός, ενώ των  $x_i$  είναι αναλογικός, το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα δύο όργανα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta b_{opt} = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right),$$

Η σχέση αυτή είναι απαλλαγμένη από τους όρους  $hr$  του ψηφιακού μετρητή και  $\varepsilon_{κνρ}$  του αναλογικού οργάνου.

Καθώς, όμως, στο πείραμα 2 οι τιμές των  $x_i$  δεν είναι μετρημένες άμεσα, αλλά υπολογίζονται από το σφάλμα ανάγνωσης των τάσεων  $U_i$ , στη παραπάνω σχέση το μέγεθος  $\delta x_{av}$  είναι παραγόμενο, δηλαδή δεν εκτιμάται άμεσα από την κλίμακα του οργάνου, αλλά παράγεται (υπολογίζεται) από το σφάλμα ανάγνωσης στις τιμές  $U_i$ , το οποίο σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να το θεωρήσουμε 0. Η προσέγγιση αυτή μηδενίζει τον αριθμητή στο δεύτερο όρο της παραπάνω σχέσης:

$$\Delta b_{opt} = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right) = b\gamma_y.$$

Ωστόσο σε πιο εκλεπτυσμένη προσέγγιση, το σφάλμα ανάγνωσης στις τιμές των  $U_i$  μπορούμε να το θεωρήσουμε όχι 0, αλλά μικρότερο από  $\psi_u/10$  (μικρότερο του μισού πάχους της χαρακιάς, που είναι συνήθως  $\psi/5$ , δηλαδή να θέσουμε  $\varepsilon_{av} \leq \psi_u/10 = 1 \text{ V}$ ). Για τις παραγόμενες τιμές των  $\delta x_{av}$ , η δεύτερη προσέγγιση παράγει ένα άνω όριο:

$$\delta x_{av} = \frac{1}{2} \times \frac{\delta U}{\sqrt{U}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{\varepsilon_{av}}{\sqrt{U_1}} = \frac{1}{2} \times \frac{(\psi_u/10)}{\sqrt{160}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{160}} \approx 0,04 \text{ (V}^{1/2}\text{)},$$

όπου από τη σειρά των τιμών: 160, 180, 200, 220, 240, και 260 V επιλέγουμε τη μικρότερη, δηλαδή την 160, προκειμένου το κλάσμα να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή!

Επομένως σε συνθήκες μηδενικής διασποράς των  $y_i$ , το «σφάλμα» στην κλίση που προκαλούν τα δύο όργανα είναι

$$\Delta b_{opt} = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right) = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{\sqrt{260} - \sqrt{160}} \right),$$

όπου η παρένθεση παριστάνει το άνω όριο του ποσοστιαίου σφάλματος της κλίση  $b$ :

$$\frac{\Delta b_{opt}}{b} = \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{\sqrt{260} - \sqrt{160}} = 0,025 + \frac{2 \times 0,04}{3,47} = 2,5\% + 2,3\% = 4,8\%.$$

Διαπιστώνουμε τελικά, ότι στη λεπτότερη προσέγγιση, με σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού οργάνου ίσο με

$$\varepsilon_{av} \leq \psi_u/10 = 1 \text{ V},$$

παράγεται ένα σφάλμα (2,3 %), που δεν είναι αμελητέο, αν το συγκρίνουμε με το σφάλμα του του ψηφιακού οργάνου, που είναι 2,5 %.

Έτσι, η συνιστώσα του «σφάλματος» στην κλίση που προκαλούν τα 2 όργανα είναι

$$\Delta b_{opt} = b \times 0,048.$$

Στο βαθμό που η τιμή αυτή είναι εγγυημένη, αυτή καλύπτεται με πιθανότητα 100 %.

Τέλος, στο σφάλμα  $\Delta b_{\text{οργ}}$  πρέπει να προστεθεί και η αβεβαιότητα της κλίσης  $b$ , εφόσον πρώτα στο διάστημα αβεβαιότητας  $t_{n,p}\sigma_{b\mu}$  προσδοθεί πιθανότητα κάλυψης 99,73 %.

Θυμίζουμε, ότι η τυπική απόκλιση των  $b_k$  ( $\sigma_b$ ) υπολογίζεται για τη συνάρτηση  $y = bx$ , ενώ το αποτέλεσμα το παρουσιάζουμε σε μορφή:

$$e/m = (\text{τιμή}) \pm \Delta(e/m).$$

**Πίνακας 2**  
**Κύρια χαρακτηριστικά και ακρίβεια μερικών αναλογικών και ψηφιακών οργάνων**

Μετρητής	Εύρος κλίμακας	Κύριο σφάλμα οργάνου ( $\psi/2$ )	Τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης $\psi$
Μεταλλικός κανόνας	0-300 mm 0-500 mm 0-1000 mm	0,05 mm 0,05 mm 0,1 mm	0,5 και 1 mm 0,5 και 1 mm 1 mm
Παχύμετρο με πρόσθετη κλίμακα nonius	0-125 mm 0-200 mm 0-320 mm	0,05 mm, με nonius των 0,05 mm ή 0.1 mm με nonius των 0,1 mm	0,1 mm 0,1 mm 0,1 mm
Μικρόμετρο με ελάχιστη υποδιαίρεση 0,01 mm	0-25 mm	0,004 mm	0,01 mm
Ζυγός ηλεκτρομηχανικός	0-1200 g	0,05 g	0,1 g
Ζυγός αναλυτικός (ψηφιακός)	0-200 g	Οι μετρολογικές σταθερές αναγράφονται στο συνοδευτικό βιβλιαράκι του οργάνου	0,01 g
Ψηφιακό χρονόμετρο χειρός, ηλεκτρονικό, με κρύσταλλο χαλαζία	0-30 min	<u>Πολύ</u> μικρότερο από 0,01 s ( $10^{-5}$ - $10^{-6}$ %!)	Διακριτική ικανότητα 0,01 s
Θερμόμετρα υδραργύρου	- 35, + 100 °C	Μία υποδιαίρεση όταν αυτή έχει τιμή 1, 2, 5 °C ή 2 υποδιαίρεσεις όταν η τιμή τους είναι 0,5 °C.	1 °C 0,5 °C
Ψηφιακά πολύμετρα και πάσης φύσεως ηλεκτρονικά όργανα και μετρητές	Μετρητής πολλών κλιμάκων	Οι μετρολογικές σταθερές αναγράφονται στο συνοδευτικό βιβλιαράκι του οργάνου	Η διακριτική ικανότητα εξαρτάται από την κλίμακα
Βολτόμετρο αναλογικό	0-200 V	Basic accuracy 0,5% (κύριο σφάλμα) $\psi/2 = 1 \text{ V}$	Accuracy class 1% (κατηγορία 1) $\psi = 2 \text{ V}$
Αμπερόμετρο αναλογικό	0-1 A	Basic accuracy 0,5 % (κύριο σφάλμα) ( $\psi/2 = 0,005 \text{ A}$ )	Accuracy class 1 % (κατηγορία 1) $\psi = 0,01 \text{ A}$

Πίνακας 3

Εγγυημένο διάστημα σφάλματος και τυπικό σφάλμα μ.τ. μερικών συναρτήσεων

Συνάρτηση $u$	Εγγυημένο διάστημα σφάλματος $\varepsilon_u$	Τυπικό σφάλμα $\sigma_u$ της μέσης τιμής με πιθανότητα κάλυψης 68,27 % ( $n = \infty$ )
Πρόσθεση $u = x + y$	$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$(\sigma_u)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
Διαφορά $u = x - y$	$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$(\sigma_u)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
Γενικά $u = ax \pm by \pm cz \pm$	$\varepsilon_u = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z +$	$(\sigma_u)^2 = (a\sigma_x)^2 + (b\sigma_y)^2 + (c\sigma_z)^2$
Πολλαπλασιασμός με σταθερά $u = kx$	$\varepsilon_u =  k  \varepsilon_x$	$\sigma_u =  k  \sigma_x$
Δύναμη $u = x^n$	$\varepsilon_u =  nx^{n-1}  \varepsilon_x$	$\sigma_u =  nx^{n-1}  \sigma_x$
Γινόμενο $u = xy$	$\delta_u = \delta_x + \delta_y$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα
Πηλίκο $u = x/y$	$\delta_u = \delta_x + \delta_y$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\delta_x)^2 + (\delta_y)^2$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα
Γινόμενο δυνάμεων $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots$	$\delta_u = \alpha\delta_x + \beta\delta_y + \gamma\delta_z +$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα	$(\delta_u)^2 = (\alpha\delta_x)^2 + (\beta\delta_y)^2 + (\gamma\delta_z)^2$ , όπου $\delta$ είναι το σχετικό σφάλμα
Εκθετικό $u = e^{ax}$	$\varepsilon_u =  a  e^{ax} \varepsilon_x$	$\sigma_u =  a  e^{ax} \sigma_x$
Ημίτονο $u = a \sin(\beta x)$	$\varepsilon_u = a\beta  \cos(\beta x)  \varepsilon_x$	$\sigma_u = a\beta  \cos(\beta x)  \sigma_x$
Συνημίτονο $u = a \cos(\beta x)$	$\varepsilon_u = a\beta  \sin(\beta x)  \varepsilon_x$	$\sigma_u = a\beta  \sin(\beta x)  \sigma_x$
Συνάρτηση πολλών μεταβλητών $u = f(x, y, z, \dots)$	$\varepsilon_f = \left  \frac{\partial f}{\partial x} \right  \varepsilon_x + \left  \frac{\partial f}{\partial y} \right  \varepsilon_y +$ όπου $X = x \pm \varepsilon_x, Y = y \pm \varepsilon_y, \dots$	$\sigma_f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 +$ όπου $X = \bar{x} \pm \sigma_x, Y = \bar{y} \pm \sigma_y, \dots$ και $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$

$$\text{Πίνακας πιθανοτήτων } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad 0 \leq \Phi(z) \leq 1$$

**Πιθανότητα εμφάνισης της απόκλισης (σφάλματος)  $\Delta$  σε κανονική κατανομή ( $n = \infty!$ )**

Από τον ορισμό της πυκνότητας σφάλματος  $f(\Delta)$  (βλ. εργαστηριακό οδηγό) προκύπτει ότι η πιθανότητα (συχνότητα), η απόκλιση (σφάλμα)  $\Delta$  να βρίσκεται μεταξύ δύο προκαθορισμένων τιμών  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_{\Delta}(\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2) = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} f(\Delta) d\Delta = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\sigma_0}\right)^2} d\Delta = \Phi(z),$$

όπου  $z = \Delta/\sigma_0$  είναι η αδιάστατη ανηγμένη μεταβλητή. Το ολοκλήρωμα φέρει διάφορες ονομασίες: ολοκλήρωμα σφαλμάτων, πιθανότητα διαστήματος σφάλματος, πιθανότητα (επίπεδο) εμπιστοσύνης ή πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος σφάλματος, που χρησιμοποιείται εδώ.

Για συμμετρικές περιπτώσεις, δηλαδή όπου  $|\Delta_1| = |\Delta_2|$ , τις τιμές της  $\Phi(z)$  τις βρίσκει κανείς στον ειδικό πίνακα πιθανοτήτων, οι τιμές του οποίου υπολογίζονται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, με  $\sigma_0 = 1$  (Πίνακας 4). Ωστόσο στην πειραματική πρακτική ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι πιθανότητες (τιμές της  $\Phi(z)$ ) για  $z = 1, 2$  και  $3$ , δηλαδή για διαστήματα σφαλμάτων  $\Delta_1 = \sigma_0$ ,  $\Delta_2 = 2\sigma_0$  και  $\Delta_3 = 3\sigma_0$ , που στον πίνακα είναι τονισμένα.

**Πίνακας 4**

$$\text{Πίνακας πιθανοτήτων } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad 0 \leq \Phi(z) \leq 1$$

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
0,00	0,00000	1,30	0,80640	2,60	0,99068
0,05	0,03988	1,35	0,82298	2,65	0,99195
0,10	0,07966	1,40	0,83849	2,70	0,99307
0,15	0,11924	1,45	0,85294	2,75	0,99404
0,20	0,15852	1,50	0,86639	2,80	0,99489
0,25	0,19741	1,55	0,87886	2,85	0,99563
0,30	0,23582	1,60	0,89040	2,90	0,99627
0,35	0,27366	1,65	0,90106	2,95	0,99682
0,40	0,31084	1,70	0,91087	<b>3,00</b>	<b>0,99730</b>
0,45	0,34729	1,75	0,91988	3,10	0,99806
0,50	0,38292	1,80	0,92814	3,20	0,99863
0,55	0,41768	1,85	0,93569	3,30	0,99903
0,60	0,45149	1,90	0,94257	3,40	0,99933
0,65	0,48431	1,95	0,94882	3,50	0,99953
0,70	0,51607	<b>2,00</b>	<b>0,95450</b>	3,60	0,99968
0,75	0,54675	2,05	0,95964	3,70	0,99978
0,80	0,57629	2,10	0,96427	3,80	0,99986
0,85	0,60468	2,15	0,96844	3,90	0,99990
0,90	0,63188	2,20	0,97219	<b>4,00</b>	<b>0,99994</b>
0,95	0,65789	2,25	0,97555	4,10	0,99996
<b>1,00</b>	<b>0,68269</b>	2,30	0,97855	4,20	0,99997
1,05	0,70628	2,35	0,98123	4,40	0,99999
1,10	0,72867	2,40	0,98360	4,50	0,999994
1,15	0,74986	2,45	0,98571		
1,20	0,76986	2,50	0,98758		
1,25	0,78870	2,55	0,98922		

**Πίνακας 5**  
**Πίνακας συντελεστών Student**

<i>n</i>	<i>P</i>					
	50 %	68,27 % (1σ)	95,45 % (2σ)	99 %	99,73 % (3σ)	99,9 %
2	1,000	1,84	13,97	63,66	235,8	636,6
3	0,916	1,32	4,53	8,92	19,21	31,60
4	0,765	1,20	3,31	5,84	9,22	12,94
5	0,741	1,14	2,87	4,60	6,62	8,610
6	0,727	1,11	2,65	4,03	5,51	6,859
7	0,718	1,09	2,52	3,71	4,90	5,959
8	0,711	1,08	2,43	3,50	4,53	5,405
9	0,706	1,07	2,37	3,36	4,28	5,041
10	0,703	1,06	2,32	3,25	4,09	4,781
11	0,700	1,05	2,28	3,17	3,96	4,587
12	0,697	1,05	2,25	3,11	3,85	4,487
13	0,695	1,04	2,23	3,05	3,76	4,138
14	0,694	1,04	2,21	3,01	3,69	4,221
15	0,692	1,04	2,20	2,98	3,64	4,140
16	0,691	1,03	2,18	2,95	3,59	4,073
17	0,690	1,03	2,17	2,92	3,54	4,015
18	0,689	1,03	2,16	2,90	3,51	3,965
19	0,688	1,03	2,15	2,88	3,48	3,922
20	0,688	1,03	2,14	2,86	3,45	3,883
21	0,687	1,03	2,13	2,85	3,42	3,850
25	0,685	1,02	2,11	2,79	3,33	3,745
30	0,683	1,02	2,09	2,75	3,27	3,659
35	...?....	1,01	2,07	2,72	3,23	...?.....
40	...?....	1,01	2,06	2,70	3,20	...?....
45	...?....	1,01	2,06	2,69	3,18	...?....
50	...?....	1,01	2,05	2,68	3,16	...?....
100	...?....	1,005	2,05	2,63	3,007	...?....
∞	0,674	1,000	2,000	2,576	3,000	3,291

## Ζητήματα ασφάλειας στους χώρους των εκπαιδευτικών εργαστηρίων

### 1. Γενικά περί ηλεκτροπληξίας

Στους χώρους των εκπαιδευτικών εργαστηρίων, εν γένει, ο κίνδυνος ηλεκτροπληξίας είναι μεγάλος. Οι σπουδαστές πρέπει να μελετήσουν το μέρος αυτό, για δική τους ασφάλεια αλλά και την ασφάλεια του εργαστηριακού εξοπλισμού. Ωστόσο με φροντίδα του προσωπικού, τα εκπαιδευτικά εργαστήρια είναι σε μεγάλο βαθμό ασφαλή. Παρά ταύτα, ο σπουδαστής πρέπει να γνωρίζει μερικά απλά ζητήματα που σχετίζονται με την ηλεκτροπληξία, όπως:

1. Στην πειραματική πρακτική, η πιο επικίνδυνη ηλεκτροπληξία είναι η τύπου χέρι-χέρι, καθώς το ρεύμα επηρεάζει άμεσα και έντονα το αναπνευστικό και τη λειτουργία της καρδιάς.
2. Οι οργανικές βλάβες εξαρτώνται από τη διάρκεια της ηλεκτροπληξίας και το ρεύμα που μας διαρρέει.
3. Ρεύματα έως 5 mA θεωρούνται ασφαλή στα εκπαιδευτικά εργαστήρια, όταν η διάρκεια ηλεκτροπληξίας δεν υπερβαίνει το 1 s.
4. Στα 18 mA παρατηρείται σπασμός των μυών στα δάχτυλα των χεριών. Συνέπεια αυτού είναι η αδυναμία του πληγέντος να αποτραβηχτεί από τα ρευματοφόρα καλώδια. Αν, κάποια στιγμή, παρατηρήσετε την εικόνα αυτή στον συνάδελφό σας, ο ασφαλέστερος (για εσάς) τρόπος παροχής βοήθειας είναι να κλείσετε αμέσως την πηγή τάσης. Αν η πηγή απέχει πολύ, να τον αποτραβήσετε αμέσως από τα καλώδια, αλλά με τρόπο, πιάνοντας τον από τα ρούχα και όχι από κάποιο ακάλυπτο μέρος του σώματός του.
5. Ηλεκτροπληξία με 50 mA, σε χρόνο 1s, θεωρείται θανατηφόρα.
6. Η ωμική αντίσταση χέρι-χέρι, όταν τα ρευματοφόρα καλώδια εφάπτονται τις ανοιχτές πληγές, είναι περίπου 600 Ω. Σε μία σπάνια περίπτωση καταγράφηκε θανατηφόρα ηλεκτροπληξία από τάση 30 V(!) των καλωδίων του ΟΤΕ ( $30 \text{ V}/600 \Omega = 50 \text{ mA}$ ).
7. Η ωμική αντίσταση χέρι-χέρι, όταν το δέρμα είναι καθαρό και στεγνό, στις γυναίκες κυμαίνεται από 200 έως 600 kΩ, ενώ στους άνδρες είναι μεγαλύτερη, καθώς το δέρμα τους είναι παχύτερο. Επίσης, η αντίσταση του υγρού δέρματος είναι εκατοντάδες φορές μικρότερη.
8. Είναι επικίνδυνο λάθος να νομίζουμε ότι δεν κινδυνεύουμε αν έρθουμε σε επαφή με τα καλώδια της ΔΕΗ, όπου η ενεργός τιμή της εναλλασσόμενης τάσης είναι 220 V. Πράγματι, όταν τα χέρια είναι υγρά, τότε ο κίνδυνος είναι άμεσος και πολύ μεγάλος. Ωστόσο ακόμη και όταν τα χέρια είναι στεγνά, στην πρώτη χρονική στιγμή το ρεύμα είναι

$$I \approx 220 \text{ V}/220 \text{ k}\Omega = 1 \text{ mA}.$$

Αλλά ταυτόχρονα, τα σημεία επαφής με το δέρμα αρχίζουν να ιδρώνουν έντονα, λόγω ερεθισμού των ιδρωτοποιών αδένων. Συνέπεια αυτού είναι η ραγδαία μείωση της αντίστασης του δέρματος και αύξηση του ρεύματος σε επικίνδυνα επίπεδα τιμών.

Στα εκπαιδευτικά εργαστήρια, οι πηγές τάσης που παράγουν τάση άνω των 100 V πρέπει να διαθέτουν Current Limiter ρυθμισμένο στα 5 mA ή σε μικρότερη τιμή εκεί όπου οι πειραματικές συνθήκες αυτό το επιτρέπουν. Τροφοδοτικά που παράγουν τάση άνω των 100 V και δε διαθέτουν Current Limiter πρέπει να αποσύρονται από τα εκπαιδευτικά εργαστήρια.

### 2. Τροφοδοσία του Εργαστηρίου από το δίκτυο της ΔΕΗ

Η τροφοδοσία του Εργαστηρίου γίνεται από το δίκτυο της ΔΕΗ, με τριφασική τάση 220 V, 50 Hz. Συνήθως, η αρχική τάση της ΔΕΗ είναι υψηλή, οπότε σε έναν πλησιέστερο υποσταθμό η υψηλή τάση υποβιβάζεται στα επίπεδα των 220 V, με έναν μετασχηματιστή υποβιβασμού. Σημειώνουμε, ότι οι περισσότερες εκπαιδευτικές και ερευνητικές διατάξεις είναι μονοφασικές,

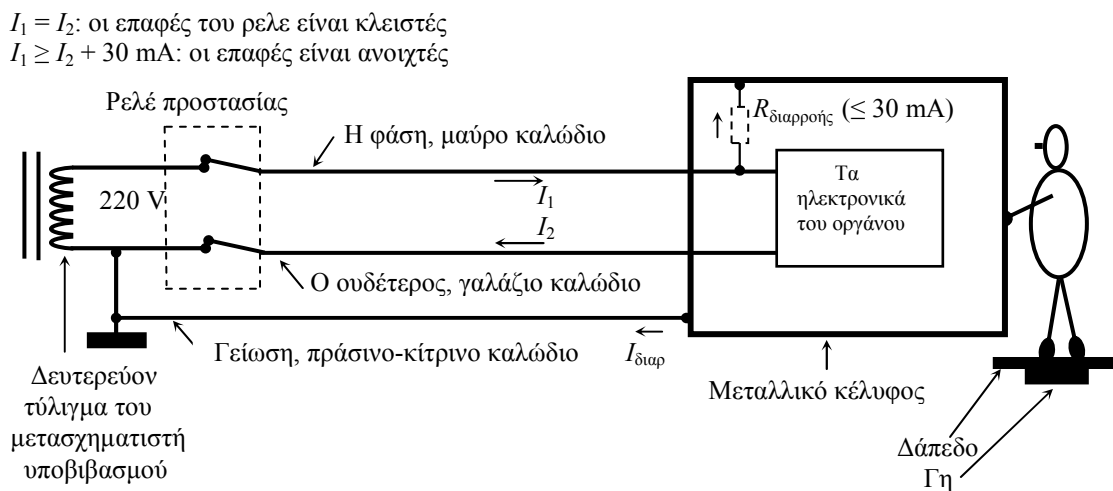
δηλαδή τροφοδοτούνται με μία από τις τρεις φάσεις του δικτύου. Για το λόγο αυτό το τριφασικό δίκτυο, οι τριφασικές συσκευές όπως και τα τριφασικά συστήματα ασφαλείας εδώ δεν θα εξεταστούν.

### 3. Θωράκιση των ευαίσθητων οργάνων από τις ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές

Τα ευαίσθητα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά όργανα είναι ευάλωτα στις ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές. Για προστασία τους, τα όργανα αυτά περιβάλλονται από ένα μεταλλικό κέλυφος, το οποίο δεν επιτρέπει την είσοδο των εξωτερικών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων στο εσωτερικό του. Εδώ αδύνατο σημείο είναι τα καλώδια σύνδεσης με την είσοδο της συσκευής, που λειτουργούν ως κεραίες και εισάγουν την ηλεκτρική παρεμβολή στο εσωτερικό του οργάνου. Για να μειωθούν και αυτές οι παρεμβολές, η σύνδεση γίνεται με ειδικά καλώδια που περιβάλλονται από μία εύκαμπτη χάλκινη πλεξούδα, το λεγόμενο μπλεντάζ, το οποίο συνδέεται με το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου και επομένως αποτελεί την εύκαμπτη προέκτασή του.

### 4. Προορισμός της γείωσης και του ρελέ προστασίας

Πρέπει να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι η Γη, δηλαδή το έδαφος, σε βάθος όπου το χώμα είναι πάντα υγρό (πάνω από 50 cm), είναι ηλεκτρικά αγωγίμο και επομένως η επιφάνεια της Γης, καθώς είναι πολύ μεγάλη, επηρεάζει άμεσα τις ευαίσθητες ηλεκτρικές και ηλεκτρονικές διατάξεις, όταν τα ηλεκτρικά δυναμικά του εδάφους και του μεταλλικού κελύφους διαφέρουν και μεταβάλλονται. Για να εξουδετερωθεί και αυτή η παρεμβολή, το μεταλλικό κέλυφος το γειώνουν και με τον τρόπο αυτό εξαλείφεται η ηλεκτρική παρεμβολή που προκαλείται από την ανεπιθύμητη αυτή διαφορά δυναμικού.



Σχήμα 20. Προστασία του χρήστη μέσω γείωσης του οργάνου.

Στη χρησιμότητα της γείωσης πρέπει να προσθέσουμε ακόμη μία: η γείωση του οργάνου προστατεύει τον χρήστη από την ηλεκτροπληξία, που μπορεί να προκληθεί από μία βλάβη στη μόνωση των ρευματοφόρων καλωδίων της συσκευής.

Όργανα που τροφοδοτούνται με μπαταρίες των 1,5 ή 9 V είναι ασφαλή. Αλλά συσκευές που τροφοδοτούνται από το δίκτυο της ΔΕΗ με 220 V, εν γένει είναι επικίνδυνες. Στη μείωση του κινδύνου ή ακόμη και στην εξάλειψή του αποσκοπεί η μέθοδος τροφοδοσίας με ρελέ προστασίας και τρία καλώδια, η σχηματική παράσταση της οποίας δίνεται στο Σχ. 20.

Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος αυτή αποσκοπεί στην εξάλειψη κάθε πιθανότητας το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου να βρεθεί υπό τάση, γεγονός που θα θέσει σε άμεσο κίνδυνο τον

χρήστη της συσκευής. Ίδια μέθοδος προστασίας του χρήστη χρησιμοποιείται και στις οικιακές συσκευές.

### **5. Γείωση του οργάνου και προστασία του χρήστη από την ηλεκτροπληξία**

Θα παρακάμψουμε προς το παρόν το ρελέ προστασίας (είναι ειδική ηλεκτρική μονάδα που διακόπτει τη σύνδεση με το δίκτυο όταν δημιουργείται διαρροή ηλεκτρικού ρεύματος προς το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου (στον ηλεκτρικό πίνακα «πέφτει το ρελέ») και θα επικεντρωθούμε στον προορισμό της γείωσης. Έτσι, θεωρούμε, ότι οι επαφές του ρελέ είναι μόνιμως κλειστές και η συσκευή τροφοδοτείται με 220 V.

Στη μέθοδο προστασίας με 3 καλώδια, τα δύο καλώδια είναι ενεργά και διαρρέοντα από το ρεύμα κατανάλωσης της συσκευής, ενώ το τρίτο χρησιμοποιείται για τη γείωση του μεταλλικού κελύφους του οργάνου. Χαρακτηριστικό της συνδεσμολογίας αυτής είναι η γείωση του ενός ενεργού καλωδίου. Οι ηλεκτρολόγοι το αποκαλούν «ο ουδέτερος» και έχει γαλάζια μόνωση από κάποιο πολυμερές. Επομένως, το καλώδιο αυτό, ως προς τη Γη, δεν βρίσκεται υπό τάση και είναι ακίνδυνο για τον ηλεκτρολόγο, σε περίπτωση που αυτός θα το αγγίξει τυχαία. Το άλλο ενεργό καλώδιο, η λεγόμενη «φάση», ως προς τη Γη, έχει εναλλασσόμενο δυναμικό που μεταβάλλεται από -308 έως +308 βολτ (220 V ενεργά), έχει μαύρη μόνωση και είναι επικίνδυνο για όποιον το αγγίξει. Αλλά το άγγιγμα των ενεργών καλωδίων αφορούν την ασφάλεια του ηλεκτρολόγου, που έχει ασφαλώς τη σημασία της, ωστόσο οι κίνδυνοι αυτοί δεν αφορούν τον χρήστη του οργάνου, ο οποίος δεν αγγίζει τα σημεία αυτά.

Ο χρήστης κινδυνεύει όταν με κάποιον τρόπο το προστατευτικό μεταλλικό κέλυφος του οργάνου βρεθεί υπό εναλλασσόμενη τάση, ως προς τη Γη. Αυτό μπορεί να συμβεί εάν, κατά παράβαση των κανόνων ασφαλείας, το μεταλλικό κέλυφος δεν είναι γειωμένο, η μόνωση του καλωδίου «φάσης» υποστεί κάποια βλάβη και δημιουργηθεί διαρροή ρεύματος από το καλώδιο «φάσης» προς το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου ( $R_{\text{διαρροής}}$ , στο Σχ. 20). Στην περίπτωση αυτή το μεταλλικό κέλυφος θα βρίσκεται υπό τάση και επομένως ένα άγγιγμα του οργάνου με το χέρι θα προκαλέσει στον χρήστη ηλεκτροπληξία, το ρεύμα (η ενεργός τιμή) της οποίας θα είναι  $220 \text{ V} / (R_{\text{διαρρ}} + \Sigma R)$ , όπου  $R_{\text{διαρροής}}$  είναι η ωμική αντίσταση της διαρροής, ενώ το άθροισμα  $\Sigma R$  είναι η συνολική αντίσταση στη διαδρομή: χέρι-πόδια-υποδήματα-δάπεδο-Γη. Βλέπουμε ότι ο προορισμός της γείωσης είναι να αποτραπούν καταστάσεις όπου το μεταλλικό κέλυφος της συσκευής βρίσκεται υπό εναλλασσόμενη τάση ως προς τη Γη.

Ωστόσο πιο επικίνδυνη είναι η κατάσταση όταν, και πάλι, κατά παράβαση των κανόνων ασφαλείας, το μεταλλικό κέλυφος δεν είναι γειωμένο, υπάρχει διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το μεταλλικό κέλυφος, ο χρήστης με το ένα χέρι αγγίζει το μεταλλικό κέλυφος, ενώ με το άλλο, κάποιο καλά γειωμένο αντικείμενο του κτιρίου, όπως, για παράδειγμα, είναι οι σωληνώσεις ύδρευσης, θέρμανσης, μπαταρίες θέρμανσης, βρύση, υγρός τοίχος, σκυρόδερμα του μπετόν κ.λπ. Εδώ ουσιαστικά ο χρήστης με το ένα χέρι αγγίζει το γειωμένο ενεργό καλώδιο, ενώ με το άλλο, μέσω της αντίστασης διαρροής, αγγίζει το ενεργό καλώδιο της «φάσης». Η επικινδυνότητα αυτής της κατάστασης σχετίζεται με το γεγονός ότι η αντίσταση χέρι-χέρι είναι πολύ μικρότερη από την αντίσταση που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή την αντίσταση χέρι-πόδια-υποδήματα-δάπεδο-Γη.

Ο κίνδυνος της ηλεκτροπληξίας *αίρεται* όταν το μεταλλικό κέλυφος είναι γειωμένο και επομένως το δυναμικό του είναι πάντα όσο και το δυναμικό της Γης. Αλλά ακόμη και όταν η διαρροή είναι μεγάλη (το ρελέ προστασίας δεν επιτρέπει διαρροή πάνω από 30 mA), το δυναμικό (είναι εναλλασσόμενο) του κελύφους λίγο θα αυξηθεί, αλλά η αύξηση αυτή δεν θα υπερβαίνει τα μερικά βολτ. Η μικρή αυτή ακίνδυνη τάση δημιουργείται από το ρεύμα διαρροής λόγω πτώσης τάσης στο καλώδιο της γείωσης, όταν το μήκος του είναι μεγάλο.

### **6. Προορισμός του ρελέ προστασίας**

Το ρελέ προστασίας βρίσκεται συνήθως στον πίνακα τροφοδοσίας του Εργαστηρίου ή της οικίας και προστατεύει τον χρήστη από όλες τις ηλεκτρικές συσκευές και επιστημονικά όργανα

που βρίσκονται στο Εργαστήριο. Στο Σχ. 13, η συσκευή τροφοδοτείται από το δίκτυο της ΔΕΗ μέσω του ρελέ, όταν οι επαφές του είναι κλειστές.

Στα εργαστήρια και ιδιωτικές κατοικίες, η ηλεκτρικές συσκευές και τα διάφορα μετρητικά και επιστημονικά όργανα τροφοδοτούνται από το δίκτυο της ΔΕΗ πάντα μέσω του ρελέ προστασίας, η αποστολή του οποίου είναι να διακόψει τη σύνδεση του οργάνου με το δίκτυο της ΔΕΗ, όταν σημειωθεί διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το μεταλλικό κέλυφος, αλλά υπό τον όρο ότι η συνολική διαρροή υπερβαίνει τα 10 ή 30 mA, ανάλογα με τον τύπο του ρελέ.

Υπάρχουν πολλοί τύποι ρελέ προστασίας. Στο διαφορικό ρελέ που βλέπουμε Σχ. 13, γίνεται σύγκριση των ρευμάτων στα δύο ενεργά καλώδια, δηλαδή των  $I_1$  και  $I_2$ . Όταν η μόνωση των καλωδίων είναι καλή και επομένως η διαρροή είναι μηδέν, ισχύει

$$I_1 = I_2,$$

οι επαφές είναι κλειστές και το ρελέ τροφοδοτεί το Εργαστήριο με 220 V. Το ρελέ ενεργοποιείται όταν  $I_1 > I_2$  και, επιπλέον,

$$I_1 \geq I_2 + 30 \text{ mA}.$$

Η συνθήκη αυτή δημιουργείται όταν εμφανίζεται διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το γειωμένο μεταλλικό κέλυφος κάποιου οργάνου του εργαστηρίου. Όταν η συνολική διαρροή υπερβαίνει τα 30 mA, «πέφτει το ρελέ», δηλαδή ο διακόπτης του ρελέ από τη θέση «άνω» μετακινείται στη θέση «κάτω», με επακόλουθο να ανοίξουν οι επαφές του ρελέ. Επομένως, η διαρροή των 30 mA ενεργοποιεί το ρελέ και αυτός ανοίγει της επαφές. Από τη στιγμή αυτή το Εργαστήριο παύει να τροφοδοτείται με 220 V. Το ρελέ επαναφέρεται στην αρχική κατάσταση μόνο μετά την εξάλειψη της διαρροής, «σηκώνοντας» το σχετικό διακόπτη στον πίνακα τροφοδοσίας του Εργαστηρίου. Όπως βλέπουμε, μεταξύ άλλων, η «πτώση του ρελέ» μας πληροφορεί ότι στην αίθουσα του εργαστηρίου, σε κάποιο ή κάποια όργανα υπάρχει διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το μεταλλικό κέλυφος και ότι η τιμή της συνολικής διαρροής υπερβαίνει τα 30 mA.

Το ρελέ προστασίας ενεργοποιείται ακόμη και όταν  $I_1 < I_2$ , δηλαδή όταν η διαρροή προς το κέλυφος γίνεται από «τον ουδέτερο», ιδιότητα που είναι πολύ χρήσιμη για την προστασία και του ηλεκτρολόγου.

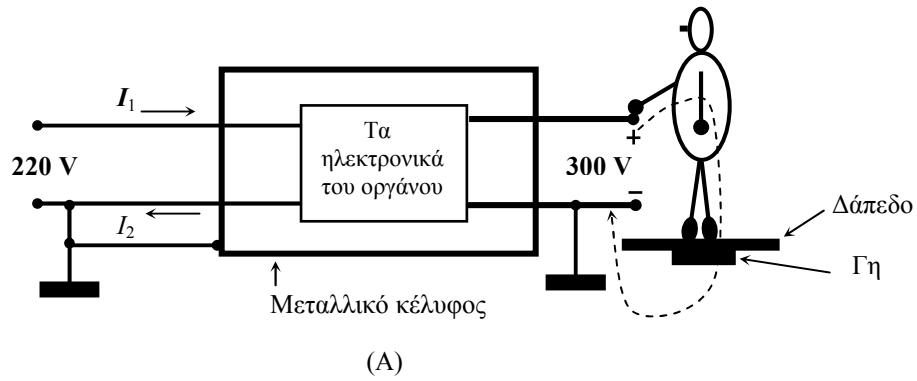
## 7. Επικίνδυνες πηγές τάσης και επικίνδυνες καταστάσεις

Όλες οι ηλεκτροπληξίες με τάσεις άνω των 30 V θεωρούνται επικίνδυνες. Πλην όμως, η επικινδυνότητα της ηλεκτροπληξίας με 40 V διαφέρει σαφώς από αυτή με 300 V. Γενικότερα, ακίνδυνες θεωρούνται οι πηγές τάσης που διαθέτουν περιοριστή ρεύματος (current limiter), ρυθμισμένο στα 5 mA ή σε μικρότερη τιμή όπου οι πειραματικές συνθήκες το επιτρέπουν. Ο περιοριστής ρεύματος (current limiter) είναι μία ειδική ηλεκτρονική μονάδα εντός του τροφοδοτικού, ο οποίος αυτόματα και ακαριαία μηδενίζει την τάση της πηγής όταν το ρεύμα κατανάλωσης πλησιάζει μία προκαθορισμένη τιμή (5 mA). Για παράδειγμα, στην Άσκηση 10, «Μελέτη του πυκνωτή κ.λπ.», στο τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 200 V, ο περιοριστής ρεύματος είναι ρυθμισμένος στο 0,1 mA.

*Τονίζουμε ιδιαίτερα*, ότι στα τροφοδοτικά που δε διαθέτουν περιοριστή ρεύματος, τίποτα δεν μας προστατεύει όταν με τα δύο χέρια αγγίζουμε τους δύο πόλους του τροφοδοτικού.

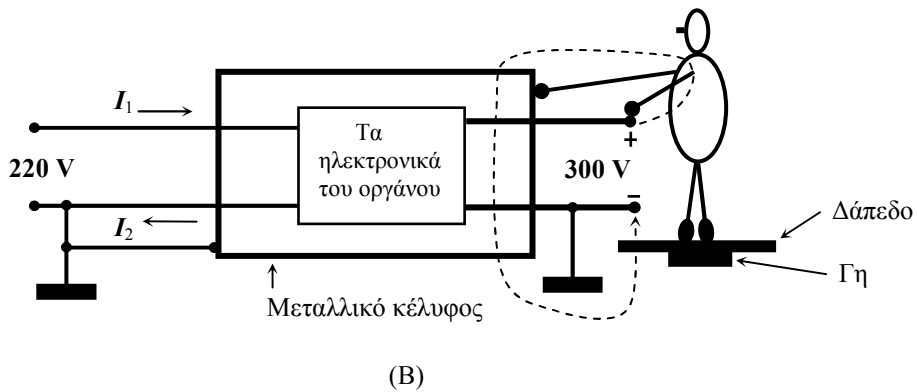
Ιδιαίτερα επικίνδυνα είναι τα τροφοδοτικά που παράγουν τάσεις άνω των 100 V και δε διαθέτουν περιοριστή ρεύματος. Το ρελέ προστασίας και η γείωση του τροφοδοτικού προστατεύουν τον ερευνητή μόνο από την τάση της ΔΕΗ. Τα μέσα αυτά δεν τον προστατεύουν από τις δευτερεύοντες τάσεις που παράγουν τα τροφοδοτικά. Για να βεβαιωθούμε, αρκεί να εξετάσουμε την επικινδυνότητα δύο περιπτώσεων ηλεκτροπληξίας από ένα τροφοδοτικό των +300 V (Άσκηση 14, *Μέτρηση του λόγου e/m*), που παρουσιάζονται στα Σχ. 21 και 22.

Στην περίπτωση Α (Σχ. 21), ακίνδυνος είναι ο πόλος ο αρνητικός, που είναι γειωμένος, ενώ επικίνδυνος είναι ο θετικός. Έστω, ότι κατά λάθος ο χρήστης αγγίζει με το ένα χέρι το



**Σχήμα 21.** Σχετικά «ακίνδυνα» ηλεκτροπληξία τύπου χέρι-πόδια, σε τροφοδοτικό με έναν πόλο γειωμένο.

θετικό πόλο του τροφοδοτικού. Εδώ το ρεύμα ηλεκτροπληξίας εξαρτάται από τα 300 V, αλλά και από τη συνολική ωμική αντίσταση του κυκλώματος στη διαδρομή: χέρι-πόδια-υποδήματα-δάπεδο-Γη. Η αντίσταση αυτή είναι συνήθως μεγάλη.



**Σχήμα 22.** Επικίνδυνη ηλεκτροπληξία τύπου χέρι-χέρι σε τροφοδοτικό με έναν πόλο γειωμένο.

Πολύ επικίνδυνη είναι η κατάσταση **B** (Σχ. 22), όπου το δεύτερο χέρι αγγίζει το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου ή κάποιου καλά γειωμένου αντικειμένου της κτιριακής εγκατάστασης.

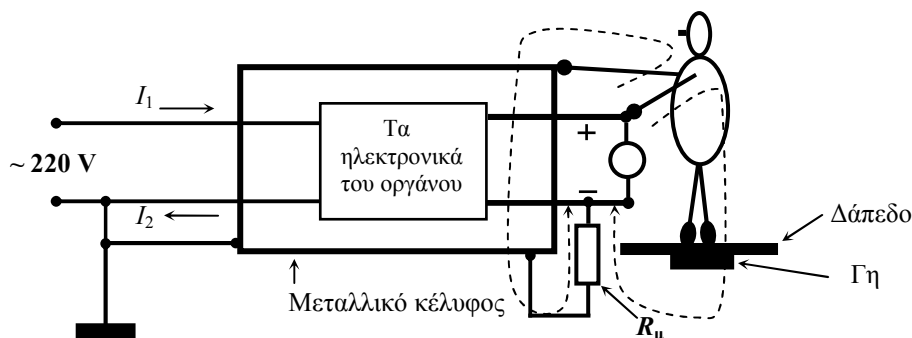
Στο Σχ. 22, μέσω γείωσης, το δεύτερο χέρι ουσιαστικά αγγίζει τον αρνητικό πόλο της πηγής. Εδώ το ρεύμα ηλεκτροπληξίας είναι πολύ μεγαλύτερο, καθώς εξαρτάται κυρίως από την αντίσταση χέρι-χέρι, που είναι πολύ μικρότερη απ' ό,τι στην περίπτωση **A**. Εδώ η μόνη προστασία προέρχεται από τον περιοριστή ρεύματος (current limiter), εάν υπάρχει, ο οποίος αυτόματα και ακαριαία μειώνει την τάση της πηγής, όταν το ρεύμα τείνει να πλησιάσει μία ορισμένη τιμή. Η απουσία του περιοριστή κάνει την κατάσταση **B** πολύ επικίνδυνη και, επομένως, πρέπει με κάθε τρόπο να αποτρέπεται έστω με παθητικά μέσα ή με χρήση ειδικά προστατευμένων καλωδίων συναρμολόγησης κ.λπ.

### 8. Λειτουργία του τροφοδοτικού σε κατάσταση Flouting mode

Σε μερικά τροφοδοτικά, παρότι το μεταλλικό κέλυφος είναι πάντα γειωμένο, κανένας από τους δύο πόλους της τάσης εξόδου δεν είναι γειωμένος. Συνήθως, στα τροφοδοτικά αυτά ο ένας από τους δύο πόλους γειώνεται, όταν η τροφοδοτούμενη συσκευή για κάποιο λόγο πρέπει οπωσδήποτε να είναι γειωμένη. Έτσι, ποιος από τους δύο πόλους θα γειωθεί αποφασίζει ο ερευνητής, ανάλογα με το αν επιθυμεί πηγή θετικής ή πηγή αρνητικής τάσης.

Τονίζουμε ακόμη μία φορά, ότι στα τροφοδοτικά που δε διαθέτουν current limiter, τίποτα δεν μας προστατεύει όταν με τα δύο μας χέρια αγγίζουμε τους δύο πόλους του τροφοδοτικού. Η κατάσταση διαφοροποιείται όταν με το ένα χέρι αγγίζουμε το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου, ενώ με το άλλο, τον έναν από τους δύο πόλους του τροφοδοτικού. Όταν ο ένας πόλος είναι

γειωμένος, αυτό θα προκαλέσει επικίνδυνη ηλεκτροπληξία όταν αγγίζουμε τον μη γειωμένο πόλο (κατάσταση B, Σχ. 22). Όταν όμως οι δύο πόλοι «είναι στον αέρα», δηλαδή το τροφοδοτικό λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode*, η ηλεκτροπληξία που θα υποστούμε θα είναι σχεδόν ακίνδυνη!



**Σχήμα 23.** Σχετικά «ακίνδυνη» ηλεκτροπληξία τύπου χέρι-χέρι σε τροφοδοτικό που λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode*.

Το τροφοδοτικό μπορεί (πρέπει) να λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode* όταν στην ηλεκτρονική συσκευή που τροφοδοτείται κανένας από τους δύο πόλους δεν είναι γειωμένος, δηλαδή και η συσκευή λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode* ή απουσιάζει σε αυτή το μεταλλικό κέλυφος κ.ο.κ. Είναι άξιο προσοχής το γεγονός, ότι η κατάσταση αυτή είναι πιο ασφαλής!

Πρέπει να σημειώσουμε ότι σε λειτουργία *Flouting mode* κανένας από τους δύο πόλους δεν είναι απολύτως ακίνδυνος, όπως είναι ο γειωμένος πόλος στα κοινά τροφοδοτικά. Πλην όμως, η λειτουργία *Flouting mode* είναι προτιμότερη καθώς στα τροφοδοτικά αυτά μεριμνάτε για την ασφάλει και καλή μόνωση των δύο πόλων από το μεταλλικό κέλυφος του τροφοδοτικού, που είναι συνήθως γειωμένο.

Αν η ηλεκτροπληξία που βλέπουμε στο Σχ. 22 είναι επικίνδυνη, σε κατάσταση *Flouting mode* (Σχ. 23), σε περίπτωση ηλεκτροπληξίας με δύο χέρια, το ρεύμα ηλεκτροπληξίας θα μειωθεί σε μεγάλο βαθμό από τη μεγάλη αντίσταση της μόνωσης  $R_{\mu}$ , η οποία είναι της τάξης  $10^7$ - $10^{10}$  Ω.

Εδώ το συνολικό ρεύμα ηλεκτροπληξίας θα διακλαδωθεί σε δύο διαδρομές, ακολουθώντας δύο ξεχωριστά κλειστά κυκλώματα. Στο πρώτο κύκλωμα το ρεύμα ακολουθεί τη διαδρομή: θετικός πόλος-χέρι-χέρι-Γη-μόνωση αρνητικού πόλου-αρνητικός πόλος της πηγής.

Στο δεύτερο κύκλωμα το ρεύμα ακολουθεί τη διαδρομή: χέρι-πόδια-δάπεδο-Γη-μόνωση αρνητικού πόλου-αρνητικός πόλος του τροφοδοτικού. Βλέπουμε, ότι στα δύο κυκλώματα προστίθεται η αντίσταση μόνωσης του αρνητικού πόλου  $R_{\mu}$ , όπως αυτή εκδηλώνεται ως προς το μεταλλικό κέλυφος του τροφοδοτικού. Το γεγονός αυτό προκαλεί μεγάλη μείωση του ρεύματος ηλεκτροπληξίας, στο βαθμό που αυτό συγκρίνεται με την περίπτωση όπου ο αρνητικός πόλος του τροφοδοτικού είναι γειωμένος (περίπτωση B, Σχ. 22). Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε, ότι αυτό που μας προστατεύει σε αυτήν την ηλεκτροπληξία είναι η μεγάλη τιμή της αντίστασης μόνωσης  $R_{\mu}$ . Εδώ, το «χτύπημα» που αισθάνεται κανείς στην πρώτη στιγμή οφείλεται στην εκφόρτωση του παρασιτικού πυκνωτή που δρα παράλληλα με την αντίσταση  $R_{\mu}$  και είναι της τάξης μερικών εκατοντάδων pF.

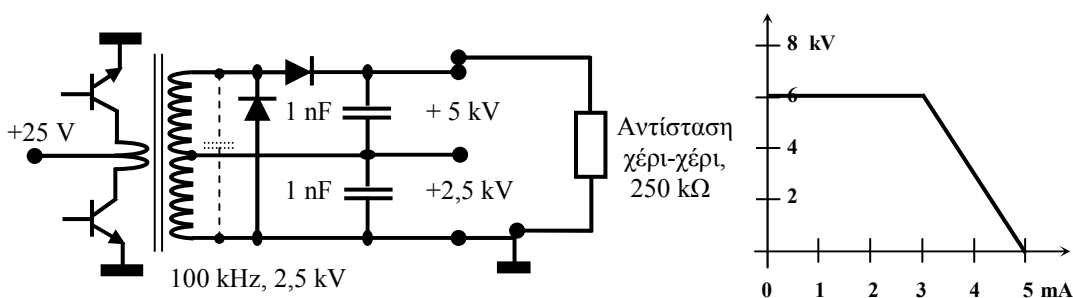
Σε κατάσταση *Flouting mode*, περίπου ίδιας έντασης ηλεκτροπληξία θα υποστούμε εάν, κατά λάθος, αγγίζουμε τον αρνητικό πόλο της πηγής, ενώ το άλλο χέρι θα αγγίζει το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου ή κάποιου γειωμένου αντικείμενου της κτιριακής εγκατάστασης. Και στην περίπτωση αυτή, από την ηλεκτροπληξία θα μας προστατεύσει η μεγάλη αντίσταση μόνωσης ( $R_{\mu}$ ) του θετικού πόλου, όπως αυτή εκδηλώνεται ως προς το μεταλλικό κέλυφος του τροφοδοτικού.

Ωστόσο και σε κατάσταση *Flouting mode*, αν το τροφοδοτικό δε διαθέτει περιοριστή ρεύματος, τίποτα δεν μας προστατεύει όταν με τα δύο χέρια αγγίζουμε τους δύο πόλους του τροφοδοτικού. Το άγγιγμα αυτό είναι επικίνδυνο για τη ζωή, όταν το τροφοδοτικό παράγει τάσεις άνω των 30 V και, πολύ επικίνδυνη, όταν η παραγόμενη τάση είναι άνω των 100 V.

### 9. Ασφαλείς πηγές υψηλής τάσης

Σε πειράματα όπου χρησιμοποιούνται τάσεις άνω των 1000 V (π.χ. 5 kV στις ασκήσεις *Περίθλαση ηλεκτρονίων*, *Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας*, *Φαινόμενο Κερ κ.λπ.*), πιο ασφαλή είναι τα τροφοδοτικά που λειτουργούν με ταλαντωτές, σε συχνότητες της τάξης 100 kHz, με μεγάλο (100) πολλαπλασιασμό της εναλλασσόμενης τάσης, η οποία στη συνέχεια ανορθώνεται και εξομαλύνεται με πυκνωτές. Συνήθως, ο ταλαντωτής λειτουργεί σε συχνότητα συντονισμού του δευτερεύοντος τυλίγματος ενός μετασχηματιστή, ο οποίος με την παρασιτική χωρητικότητα δημιουργεί ένα παράλληλο κύκλωμα *LC*. Τα τροφοδοτικά αυτά λειτουργούν ως πηγή τάσης με μικρή εσωτερική αντίσταση μόνο όταν το ρεύμα κατανάλωσης δεν υπερβαίνει τα 3 mA (Σχ. 24).

Σκόπιμα, για λόγους ασφαλείας, όταν η κατανάλωση ρεύματος υπερβαίνει τα 3 mA, η λειτουργία του τροφοδοτικού αρχίζει να γίνεται προβληματική, καθώς η έξοδος εμφανίζει μία μεγάλη εσωτερική αντίσταση, της τάξης 2 MΩ ( $\Delta U/\Delta I = 2 \times 10^6 \Omega$ ). Στα 5 mA κατανάλωσης ο ταλαντωτής παύει τη λειτουργία του. Με τον τρόπο αυτό όλο το σύστημα λειτουργεί και ως περιοριστής ρεύματος στα 5 mA.



Σχήμα 24. Σχετικά «ασφαλής» πηγή υψηλής τάσης με ταλαντωτή στα 100 kHz,

$$d.c, I \leq 3 \text{ mA}, I_{max} = 5 \text{ mA}.$$

Επιπλέον, στα τροφοδοτικά με ταλαντωτές η χωρητικότητα των πυκνωτών εξομάλυνσης της ανορθωμένης τάσης είναι της τάξης 1 nF, δηλαδή είναι μικρότερη  $10^4$ - $10^5$  φορές από ότι στα συστήματα που εξομαλύνουν την ανορθωμένη τάση στα 50 Hz. Από τη σκοπιά ασφαλείας, η μικρή χωρητικότητα των πυκνωτών εξομάλυνσης είναι προτιμότερη και συνιστά μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των τροφοδοτικών. Το πόσο χρήσιμη είναι η μικρή χωρητικότητα θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Έστω, ότι η πηγή παράγει τάση 5000 V και ότι ο σπουδαστής άθελα αγγίζει τους δύο πόλους με τα χέρια, η αντίσταση των οπίων είναι περίπου 250 kΩ (Σχ. 24).

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το ρεύμα ηλεκτροπληξίας είναι

$$I_0 = (5000 \text{ V}) / (250 \times 10^3 \Omega) = 2 \times 10^{-2} \text{ A} \quad \text{ή} \quad 20 \text{ mA},$$

το οποίο αντλείται κυρίως από τους πυκνωτές εξομάλυνσης (στο Σχ. 14,  $C_{σειράς} = 0,5 \text{ nF}$ ) και μειώνεται εκθετικά με σταθερά χρόνου

$$\tau = RC = (2,5 \times 10^5 \Omega) \times (0,5 \times 10^{-9} \text{ F}) = 125 \times 10^{-6} \text{ s} = 125 \mu\text{s}.$$

Πρακτικά, σχεδόν αμέσως, δηλαδή σε χρόνο περίπου 20-40 περιόδων, ο ταλαντωτής θα τεθεί εκτός λειτουργίας, καθώς για να διατηρηθεί η τάση στους πυκνωτές στα αρχικά επίπεδα, οι ανορθώτριες διόδους πρέπει να τους τροφοδοτούν με ρεύματα πολύ μεγαλύτερα από 5 mA, τα οποία στο πρωτεύον τύλιγμα του μετασχηματιστή είναι εκατό φορές μεγαλύτερα και τα τρανζίστορ του ταλαντωτή αδυνατούν (σκόπιμα) να ανταπεξέλθουν στις τιμές αυτές. Βλέπουμε, ότι μεταξύ άλλων, αυτό που κάνει την ηλεκτροπληξία αυτή σχετικά ακίνδυνη είναι η μικρή χωρητικότητα των πυκνωτών εξομαλύνσεις, καθώς εδώ το «χτύπημα» των 20 mA διαρκεί μόνο

$$3\tau = 3RC = 3 \times 125 \mu\text{s} = 375 \mu\text{s}.$$

### 10. Παθητικά μέσα προστασίας

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο περιοριστής ρεύματος είναι μία ειδική ηλεκτρονική μονάδα μέσα στο τροφοδοτικό, που «παρακολουθεί» το ρεύμα κατανάλωσης και «ρίχνει» την τάση όταν το ρεύμα πλησιάζει μία ορισμένη τιμή. Ωστόσο τον περιοριστή αυτόν δεν τον διαθέτουν όλα τα τροφοδοτικά.

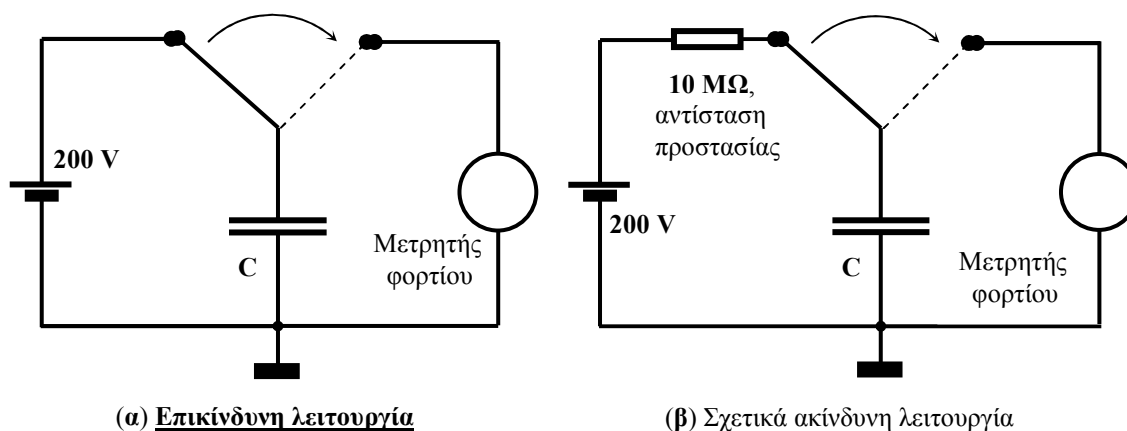
Όταν γίνεται χρήση τροφοδοτικών δίχως περιοριστή, σε πειραματικές διατάξεις όπου η κατανάλωση του ρεύματος είναι πολύ μικρή ή σχεδόν μηδενική, καλή προστασία από τα μεγάλα ρεύματα ηλεκτροπληξίας προσφέρουν και τα παθητικά μέσα προστασίας. Στην απλούστερη μορφή το μέσο αυτό είναι μία ωμική αντίσταση μεγάλης τιμής.

Για παράδειγμα, η μελέτη του πυκνωτή (μεταλλικοί δίσκοι με διάμετρο 20 cm, Άσκηση 10, Ε.Μ.Π.), μπορεί να γίνει σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα που δίνεται στο Σχ.25α, όπου στην πρώτη φάση ο πυκνωτής φορτίζεται στα 200 V και, στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός μεταγωγού, ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω ενός γειωμένου μετρητή φορτίου. Το τελευταίο επιβάλλει γείωση και του αρνητικού πόλου της πηγής.

Παρά τη γείωση, η διάταξη αυτή είναι επικίνδυνη για τους σπουδαστές εάν η πηγή των 200 V δεν έχει περιοριστή ρεύματος (στην Άσκηση 10, το limit είναι στα 0,1 mA). Σημειώνουμε, ότι τέτοια πηγή πρέπει να απομακρύνεται από τα εκπαιδευτικά εργαστήρια.

Αλλά αν για κάποιον λόγο λείπει ο περιοριστής, ενώ η αντικατάσταση της πηγής είναι αδύνατη, ικανοποιητική προστασία από την ηλεκτροπληξία μπορεί να προσφέρει και μία απλή ωμική αντίσταση των 10 MΩ, (Σχ. 25β), η οποία περιορίζει ένα ενδεχόμενο ρεύμα ηλεκτροπληξίας σε επίπεδα

$$I = \frac{U}{\Sigma R} = \frac{200 \text{ V}}{R_{\chi-\chi} + 10^7 \Omega} \leq \frac{200 \text{ V}}{10^7 \Omega} = 20 \times 10^{-6} \text{ A} = 20 \mu\text{A},$$



Σχήμα 25. Παθητικά μέσα προστασίας με χρήση μεγάλης ωμικής αντίστασης.

που είναι ακίνδυνα, όταν, για παράδειγμα, ο σπουδαστής με το ένα χέρι αγγίζει τη Γη ή κάποιο γειωμένο αντικείμενο, ενώ με το άλλο χέρι αγγίζει τα σημεία του κυκλώματος που βρίσκονται μετά την αντίσταση προστασίας, δηλαδή

- στο δεξί άκρο της αντίστασης προστασίας
- στον μεταγωγό
- στον «πάνω» δίσκο του πυκνωτή (ο «κάτω» είναι γειωμένος)
- στην είσοδο του μετρητή φορτίου κ.λπ.

*Τονίζουμε* ότι τα μέρη του κυκλώματος που βρίσκονται πριν από την αντίσταση προστασίας, δίχως τον περιοριστή παραμένουν επικίνδυνα. Συνεπώς, στο τροφοδοτικό που δε διαθέτει περιοριστή ρεύματος πρέπει με κάθε τρόπο να αποτρέπεται η προσπέλαση στα σημεία αυτά.

Ως προς την ακρίβεια του πειράματος, η παρουσία της αντίστασης προστασίας δεν επιφέρει κάποια αξιολογή μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου που συσσωρεύει ο πυκνωτής. Ο πυκνωτής, σε χρόνο  $\tau = 3RC$ , που είναι περίπου  $3 \times (10^7 \Omega) \times (10^{-10} \text{ F}) = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$ , θα φορτιστεί στα 200 V, ωστόσο υπό τον όρο ότι η αντίσταση διαρροής του πυκνωτή και των καλωδίων συνδεσμολογίας είναι εκατοντάδες ή χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από τα 10 MΩ της αντίστασης προστασίας. Συνήθως ο όρος αυτός τηρείται.

**Σημείωση.** Ο παραπάνω όρος δεν τηρείται όταν η επιφάνεια του μεταγωγέα (είναι από πλεξιγκλάς) αποκτά μικρή ηλεκτρική αγωγιμότητα, δηλαδή όταν η θερμοκρασία του εργαστηρίου είναι χαμηλή, η σχετική υγρασία μεγάλη και η επιφάνεια του πλεξιγκλάς είναι καλυμμένη με λεπτό στρώμα σκόνης (Χειμώνας ή βροχερός καιρός). Ίδια προβλήματα επιφανειακής αγωγιμότητας παρατηρούνται και στην Άσκηση *Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας* (Ε.Μ.Π.), η οποία μερικές φορές είναι τόσο μεγάλη που κάνει αδύνατη τη διεξαγωγή της Άσκησης!

Αυτό που πρέπει να προσέξει κανείς εδώ είναι η ακριβής αλλά και ασφαλής μέτρηση της τάσης της πηγής. Για να γίνει η μέτρηση της τάσης σωστά, ο μετρητής τάσης πρέπει να συνδέεται πριν από την αντίσταση προστασίας. Σε αντίθετη περίπτωση η ένδειξη του μετρητή θα είναι έντονα αλλοιωμένη (50 % της πραγματικής!), καθώς η αντίσταση προστασίας και η εσωτερική αντίσταση του μετρητή (συνήθως 10 MΩ) δημιουργούν έναν ανεπιθύμητο διαιρέτη τάσης. Σημειώνουμε, ότι το σημείο αυτό είναι επικίνδυνο και επομένως είναι προτιμότερο η μετρητής τάσης να είναι ενσωματωμένος στο τροφοδοτικό και μόνιμα (εσωτερικά) συνδεδεμένος με την έξοδο της πηγής.

Όταν οι εκπαιδευτικοί λόγοι επιβάλλουν τη σύνδεση ενός μετρητή τάσης, τότε η συναρμολόγηση του κυκλώματος πρέπει να γίνεται με κλειστό το τροφοδοτικό και με ειδικά καλώδια συνδεσμολογίας, τα λεγόμενα «ασφαλή», στα οποία τα δύο μεταλλικά άκρα είναι καλυμμένα πάντα με μετακινούμενους κυλίνδρους (μονωτικές «φούστες») από κάποιο ασφαλές και καλό μονωτικό υλικό.

## Περιεχόμενα

- Σύνοψη των κυριότερων αποτελεσμάτων, σελ. 2.**
- 2. Γενικός ορισμός του σφάλματος, σελ. 12.**
- 2.1. Προσδιορισμός του εγγυημένου διαστήματος σφάλματος  $\epsilon_a$ , σελ. 13.
- 2.2. Εγγυημένου διαστήματος σφάλματος των μετρητικών οργάνων, σελ. 14.
- 2.3. Σωστή χρήση το όρου «σφάλμα», σελ. 14.
- 3. Άμεσες μετρήσεις. Σφάλματα αναλογικών και ψηφιακών οργάνων, σελ. 15.**
- 3.1. Σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού οργάνου, σελ. 15.
- 3.2. Κύριο σφάλμα του αναλογικού οργάνου, σελ. 15.
- 4. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος ψηφιακών οργάνων, σελ. 17.**
- 4.1. Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος άμεσης μέτρησης με ψηφιακό βολτόμετρο, σελ. 17.
- 4.2. Παράδειγμα μέτρησης μεταβολής του σήματος σελ. 18.
- 5. Έμμεσες μετρήσεις. Διάδοση του εγγυημένο διάστημα σφάλματος, σελ. 19.**
- 5.1. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις 4 αριθμητικές πράξεις, σελ. 19
- 5.2. Πρόσθεση προσεγγιστικών αριθμών, σελ. 19.
- 5.3. Αφαίρεση προσεγγιστικών αριθμών, σελ. 21.
- 5.4. Πολλαπλασιασμός δύο προσεγγιστικών αριθμών, σελ. 23.
- 5.4.1. Εγγυημένο διάστημα σφάλματος γινομένου. Απόδειξη, σελ. 24.
- 5.4.2. Σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος πολλαπλασιασμού, σελ. 25.
- 5.4.3. Υπολογισμός του σφάλματος γινομένου μέσω σχετικών σφαλμάτων, σελ.25
- 5.5. Διάρθρωση δύο προσεγγιστικών αριθμών, σελ. 25.
- 5.5.1. Σχετικό εγγυημένο διάστημα σφάλματος διαίρεσης, σελ. 25.
- 5.5.2. Παράδειγμα εφαρμογής της σχέσης (23), σελ. 25.
- 5.5.3. Παράδειγμα εφαρμογής της σχέσης (24), σελ. 26.
- 5.6. Σφάλμα συνάρτησης προσεγγιστικών μεταβλητών, σελ. 26.
- 5.6.1. Αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής. Άσκηση 5 (Μέτρηση ιζώδους της γλυκερίνης), σελ. 27.
- 6. Γενικότεροι κανόνες παράστασης του σφάλματος, σελ. 28.**
- 6.1. Σίγουρα και αμφίβολα ψηφία του προσεγγιστικού αριθμού, σελ. 28.
- 6.2. Σημαντικά ψηφία του προσεγγιστικού αριθμού, σελ. 29.
- 6.3. Δεύτερο κριτήριο σίγουρων ψηφίων, πιο απλό, σελ. 29.
- 7. Σφάλματα τυχαίων τιμών ( $\sigma \gg \epsilon_{\text{οργάνου}}$ ). Αβεβαιότητα της μέσης τιμής, σελ. 30.**
- 7.1. Μετρήσεις με μικρές τιμές του  $n$  ( $3 < n < 10$ ), σελ. 30.
- 7.2. Συντελεστές Student, σελ. 31.
- 7.3. Τυχαίες τιμές και σφάλμα οργάνου, σελ. 32.
- 7.4. Ιδιαιτερότητα στην ανάγνωση των τυχαίων αποτελεσμάτων  $a_i$  με ψηφιακούς μετρητές, σελ. 32.
- 7.5. Ιδιαιτερότητα στην ανάγνωση των τυχαίων αποτελεσμάτων  $a_i$  σε μετρήσεις με αναλογικούς μετρητές, σελ. 33.
- 8. Βέλτιστος αριθμός μετρήσεων  $n_0$  ( $n_{\text{optimum}}$ ), σελ. 33.**
- 9. Ενιαία (ίδια) πιθανότητα κάλυψης των διαστημάτων σφάλματος σε έμμεσες μετρήσεις, σελ. 35.**
- 10. Υπολογισμός του εγγυημένο διαστήματος σφάλματος με χρήση διαφορικών, σελ. 36.**
- 11. Διαφορική μέθοδος μέτρησης, σελ. 36.**
- 12. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε γραμμική σχέση τύπου  $y = A + Bx$ , σελ. 37.**
- 12.1. Εισαγωγή, σελ. 37.

- 12.2. Προσέγγιση του προβλήματος σε συνθήκες  $\sigma_x = 0$  και  $\sigma_y = \text{σταθ}$ , σελ. 38.
- 12.3. Οι σχέσεις για τις παραμέτρους  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$ ,  $\delta\mathbf{a}$  και  $\delta\mathbf{b}$ , της βέλτιστης ευθείας  $y = \mathbf{a} + \mathbf{b}x$ , σελ. 38.
- 12.4. Μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, σελ. 39.
- 12.5. Πειραματικός προσδιορισμός των παραμέτρων της βέλτιστης πειραματικής ευθείας, σελ. 40.
- 12.6. Τυπική απόκλιση των κλίσεων  $\mathbf{b}_k$ , λόγω διασποράς των  $y_i$ , σελ. 41.
- 12.7. Τυπική απόκλιση στις κλίσεις  $\mathbf{b}_k$ , όταν ο αριθμός  $n$  είναι μικρός, σελ. 42.
- 12.8. Τυπική απόκλιση του ελεύθερου όρου  $\mathbf{a}$ , λόγω διασποράς των τιμών  $y_i$ , σελ. 42.
- 12.9. Συνεισφορά των οργάνων στο σφάλμα της κλίσης, σελ. 43.**
- 12.9.1. Εισαγωγή, σελ. 43.
- 12.9.2. Κατασκευή των 2 οριακών ευθειών, σελ. 44.
- 12.9.3. Όργανα ψηφιακά.  $\Delta\mathbf{b}_{\text{орг}}$  σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές ( $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ ), σελ. 46.
- 12.9.4.  $\Delta\mathbf{a}_{\text{орг}}$  σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές ( $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$ ), σελ. 48.
- 12.9.5. Ολικό «σφάλμα» της κλίσης  $\mathbf{b}$  σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές, σελ. 50.
- 12.9.5.1. Ολικό «σφάλμα» του ελεύθερου όρου  $\mathbf{a}$  σε μετρήσεις με 2 ψηφιακούς μετρητές, σελ. 51.
- 12.9.6.  $\Delta\mathbf{b}_{\text{орг}}$  σε μετρήσεις με δύο αναλογικούς μετρητές, σελ. 51.
- 12.9.6.1.  $\Delta\mathbf{a}_{\text{орг}}$  σε μετρήσεις με δύο αναλογικά όργανα, σελ. 56.
- 12.9.6.2. Ολικό «σφάλμα» στην κλίση σε μετρήσεις με δύο αναλογικά όργανα, σελ. 58.
- 12.9.7. Μικτά όργανα.  $\Delta\mathbf{b}_{\text{орг}}$  σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $x_i$  και ψηφιακό των  $y_i$ , σελ. 58.
- 12.9.7.1. Ολικό «σφάλμα» στην κλίση σε μετρήσεις με ψηφιακό μετρητή των  $y_i$  και αναλογικό των  $x_i$ , σελ. 61.
- 12.9.8. Όργανα μικτά.  $\Delta\mathbf{b}_{\text{орг}}$  σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $y_i$  και ψηφιακό των  $x_i$ , σελ. 61.
- 13.9.8.1. Ολικό «σφάλμα» στην κλίση σε μετρήσεις με αναλογικό μετρητή των  $y_i$  και ψηφιακό των  $x_i$ , σελ. 63.
- 13. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε γραμμική σχέση τύπου  $y = \mathbf{B}x$ , σελ. 64.**
- 13.1. Εισαγωγή, σελ. 64.
- 13.2. Η κλίση,  $\mathbf{b}$ , της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = \mathbf{b}x$ , ( $\sigma_y \neq 0$ ). Προσέγγιση ιδανικών οργάνων, σελ. 64.
- 13.3. Τυπική απόκλιση της κλίσης  $\mathbf{b}$ . Προσέγγιση ιδανικών οργάνων, σελ. 65.
- 13.4. Κλίση και τυπική απόκλιση της κλίσης σε συνάρτηση  $y = \mathbf{b}x$ , ( $\sigma_y \neq 0$ ), σελ. 66.
- 13.5.  $\Delta\mathbf{b}_{\text{орг}}$ , που προκαλούν τα 2 ψηφιακά όργανα σε συνάρτηση  $y = \mathbf{b}x$ , ( $\sigma_y \neq 0$ ), σελ. 66.**
- 13.6. Ολικό «σφάλμα» της κλίσης της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = \mathbf{b}x$  ( $\sigma_y \neq 0$ ), σελ. 68.
- 13.7. Μερικά λεπτά σημεία της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.**
- 13.7.1. Συνθήκες  $\sigma_x = 0$  και  $\sigma_y = \text{σταθ}$ . Συνθήκες  $\sigma_x = 0$  και  $\sigma_y = \text{σταθ}$ , σελ. 69.

## Παραρτήματα

Παράρτημα 1. Διακρίβωση των μετρητών, σελ. 70.

Παράρτημα 2. Τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης, σελ. 70.

Παράρτημα 3. Ακρίβεια της επιλεγείσας μεθόδου και ακρίβεια του αποτελέσματος, σελ. 71.

Παράρτημα 4. Μερικές ιδιότητες της διασποράς  $\sigma_0^2$ , σελ. 72.

Παράρτημα 5. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Διασπορές  $\sigma_a^2$  και  $\sigma_b^2$ , σελ. 73.

Π5.1. Διασπορά του όρου  $\mathbf{a}$ ,  $\sigma_a^2$ . Προσέγγιση ιδανικών μετρητών, σελ. 73.

Π5.2. Διασπορά της κλίσης  $\mathbf{b}$ ,  $\sigma_b^2$ . Προσέγγιση ιδανικών μετρητών, σελ. 74.

**Παράρτημα 6.** Γραμμικοποίηση της μαθηματικής σχέσης και ο όρος  $\sigma_y = \text{σταθ.}$  σελ. 75.

**Παράρτημα 7.** «Σφάλμα» του A/D (Analog-to-Digital Converter) σε αυτοματοποιημένες μετρήσεις με υπολογιστές, σελ. 76.

**Παράρτημα 8.** Εγγυημένο διάστημα σφάλματος στις 4 αριθμητικές πράξεις, σελ. 76.

*Π.8.1.* Εγγυημένο διάστημα σφάλματος πρόσθεσης, σελ. 76.

*Π.8.2.* Εγγυημένο διάστημα σφάλματος αφαίρεσης, σελ. 77.

*Π.8.3.* Εγγυημένο διάστημα σφάλματος πολλαπλασιασμού, σελ. 77.

*Π.8.4.* Εγγυημένο διάστημα σφάλματος διαίρεσης, σελ. 77.

**Παράρτημα 9.** Εγγυημένο διάστημα σφάλματος συνάρτησης προσεγγιστικών μεταβλητών, σελ. 78.

**Παράρτημα 10.** Κατανομή πυκνότητας σφαλμάτων κατά Poisson, σελ. 78.

**Παράρτημα 11.** Ομαλή πυκνότητα κατανομής των σφαλμάτων, σελ. 80.

**Παράρτημα 12.** Διάστημα σφάλματος μεγάλου αριθμού προσθετέων, σελ. 81.

**Βιβλιογραφία,** σελ. 83.

### Μερικά παραδείγματα

υπολογισμού του όρου  $\Delta b_{\text{орг}}$  στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, σελ. 84.

**Άσκηση 4.** «Προσδιορισμός του μέτρου στρέψης υλικού με τη μέθοδο του στροφικού Εκκρεμούς», σελ. 84.

**Άσκηση 42.** «Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας», σελ. 88.

**Άσκηση 34.** «Περίθλαση ηλεκτρονίων», σελ. 90.

**Άσκηση 2.** «Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο φυσικού εκκρεμούς», σελ. 93.

**Άσκηση 32.** «Βαθμονόμηση θερμοζεύγους», σελ. 95.

**Άσκηση 14.** «Μέτρηση του λόγου  $e/m$  του ηλεκτρονίου», σελ. 96.

### Πίνακες

**Πίνακας 2.** Κύρια χαρακτηριστικά και ακρίβεια μερικών αναλογικών και ψηφιακών οργάνων, σελ. 101.

**Πίνακας 3.** Εγγυημένο διάστημα σφάλματος και τυπικό σφάλμα μερικών συναρτήσεων, σελ. 102.

**Πίνακας 4.** Πίνακας πιθανοτήτων  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ,  $0 \leq \Phi(z) \leq 1$ , σελ. 103.

**Πίνακας 5.** Πίνακας συντελεστών Student, σελ. 104.

**Ζητήματα ασφάλειας στους χώρους των εκπαιδευτικών εργαστηρίων σελ. 118.**

1. Γενικά περί ηλεκτροπληξίας, σελ. 118.
2. Τροφοδοσία του Εργαστηρίου από το δίκτυο της ΔΕΗ, σελ. 118.
3. Θωράκιση των ευαίσθητων οργάνων από τις ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές, σελ. 119.
4. Προορισμός της γείωσης και του ρελέ προστασίας, σελ. 119.
5. Γείωση του οργάνου και προστασία του χρήστη από την ηλεκτροπληξία, σελ. 120.
6. Προορισμός του ρελέ προστασίας, σελ. 120.
7. Επικίνδυνες πηγές τάσης και επικίνδυνες καταστάσεις, σελ.121.
8. Λειτουργία του τροφοδοτικού σε κατάσταση *Flouting mode*, σελ. 122.
9. Ασφαλείς πηγές υψηλής τάσης, σελ. 124.
10. Παθητικά μέσα προστασίας, σελ. 125.

## **Ζητήματα ασφάλειας στους χώρους των εκπαιδευτικών εργαστηρίων**

### **1. Γενικά περί ηλεκτροπληξίας**

Στους χώρους των εκπαιδευτικών εργαστηρίων, εν γένει, ο κίνδυνος ηλεκτροπληξίας είναι μεγάλος. Οι σπουδαστές πρέπει να μελετήσουν το μέρος αυτό, για δική τους ασφάλεια αλλά και την ασφάλεια του εργαστηριακού εξοπλισμού. Ωστόσο με φροντίδα του προσωπικού, τα εκπαιδευτικά εργαστήρια είναι σε μεγάλο βαθμό ασφαλή. Παρά ταύτα, ο σπουδαστής πρέπει να γνωρίζει μερικά απλά ζητήματα που σχετίζονται με την ηλεκτροπληξία, όπως:

**1.1.** Στην πειραματική πρακτική, η πιο επικίνδυνη ηλεκτροπληξία είναι η τύπου χέρι-χέρι, καθώς το ρεύμα επηρεάζει άμεσα και έντονα το αναπνευστικό και τη λειτουργία της καρδιάς.

**1.2.** Οι οργανικές βλάβες εξαρτώνται από τη διάρκεια της ηλεκτροπληξίας και το ρεύμα που μας διαρρέει.

**1.3.** Ρεύματα έως 5 mA θεωρούνται ασφαλή στα εκπαιδευτικά εργαστήρια, όταν η διάρκεια ηλεκτροπληξίας δεν υπερβαίνει το 1 s.

**1.4.** Στα 18 mA παρατηρείται σπασμός των μυών στα δάχτυλα των χεριών. Συνέπεια αυτού είναι η αδυναμία του πληγέντος να αποτραβηχτεί από τα ρευματοφόρα καλώδια. Αν, κάποια στιγμή, παρατηρήσετε την εικόνα αυτή στον συνάδελφό σας, ο ασφαλέστερος (για εσάς) τρόπος παροχής βοήθειας είναι να κλείσετε αμέσως την πηγή τάσης. Αν η πηγή απέχει πολύ, να τον αποτραβήσετε αμέσως από τα καλώδια, αλλά με τρόπο, πιάνοντας τον από τα ρούχα και όχι από κάποιο ακάλυπτο μέρος του σώματός του.

**1.5.** Ηλεκτροπληξία με 50 mA, σε χρόνο 1s, θεωρείται θανατηφόρα.

**1.6.** Η ωμική αντίσταση χέρι-χέρι, όταν τα ρευματοφόρα καλώδια εφάπτονται τις ανοιχτές πληγές, είναι περίπου 600 Ω. Σε μία σπάνια περίπτωση καταγράφηκε θανατηφόρα ηλεκτροπληξία από τάση 30 V(!) των καλωδίων του ΟΤΕ ( $30 \text{ V}/600 \Omega = 50 \text{ mA}$ ).

**1.7.** Η ωμική αντίσταση χέρι-χέρι, όταν το δέρμα είναι καθαρό και στεγνό, στις γυναίκες κυμαίνεται από 200 έως 600 kΩ, ενώ στους άνδρες είναι μεγαλύτερη, καθώς το δέρμα τους είναι παχύτερο. Επίσης, η αντίσταση του υγρού δέρματος είναι εκατοντάδες φορές μικρότερη.

**1.8.** Είναι επικίνδυνο λάθος να νομίζουμε ότι δεν κινδυνεύουμε αν έρθουμε σε επαφή με τα καλώδια της ΔΕΗ, όπου η ενεργός τιμή της εναλλασσόμενης τάσης είναι 220 V. Πράγματι, όταν τα χέρια είναι υγρά, τότε ο κίνδυνος είναι άμεσος και πολύ μεγάλος. Ωστόσο ακόμη και όταν τα χέρια είναι στεγνά, στην πρώτη χρονική στιγμή το ρεύμα είναι

$$I \approx 220 \text{ V}/220 \text{ k}\Omega = 1 \text{ mA}.$$

Αλλά ταυτόχρονα, τα σημεία επαφής με το δέρμα αρχίζουν να ιδρώνουν έντονα, λόγω ερεθισμού των ιδρωτοποιών αδένων. Συνέπεια αυτού είναι η ραγδαία μείωση της αντίστασης του δέρματος και αύξηση του ρεύματος σε επικίνδυνα επίπεδα τιμών.

Στα εκπαιδευτικά εργαστήρια, οι πηγές τάσης που παράγουν τάση άνω των 100 V πρέπει να διαθέτουν Current Limiter ρυθμισμένο στα 5 mA ή σε μικρότερη τιμή εκεί όπου οι πειραματικές συνθήκες αυτό το επιτρέπουν. Τροφοδοτικά που παράγουν τάση άνω των 100 V και δε διαθέτουν Current Limiter πρέπει να αποσύρονται από τα εκπαιδευτικά εργαστήρια.

### **2. Τροφοδοσία του Εργαστηρίου από το δίκτυο της ΔΕΗ**

Η τροφοδοσία του Εργαστηρίου γίνεται από το δίκτυο της ΔΕΗ, με τριφασική τάση 220 V, 50 Hz. Συνήθως, η αρχική τάση της ΔΕΗ είναι υψηλή, οπότε σε έναν πλησιέστερο υποσταθμό η υψηλή τάση υποβιβάζεται στα επίπεδα των 220 V, με έναν μετασχηματιστή υποβιβασμού. Σημειώνουμε, ότι οι περισσότερες εκπαιδευτικές και ερευνητικές διατάξεις είναι μονοφασικές,

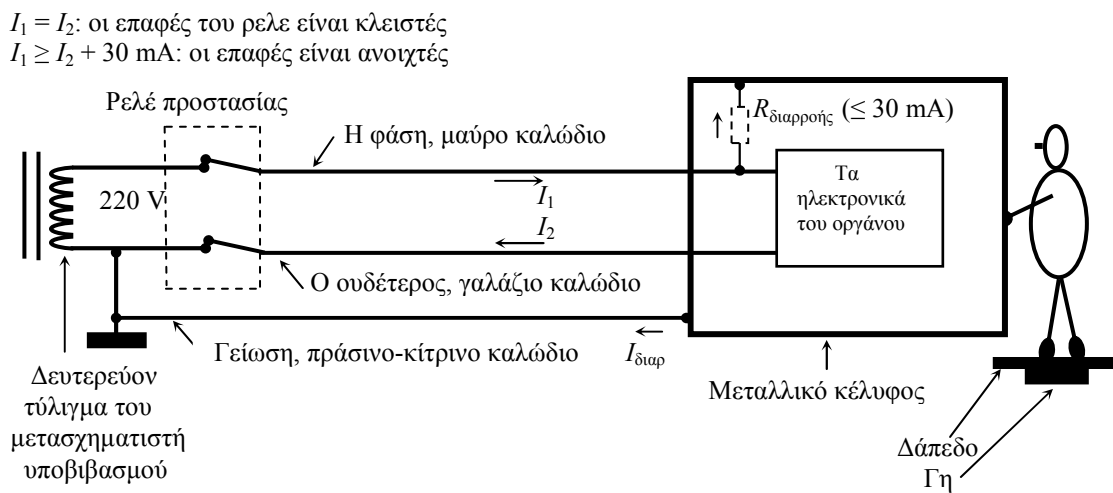
δηλαδή τροφοδοτούνται με μία από τις τρεις φάσεις του δικτύου. Για το λόγο αυτό το τριφασικό δίκτυο, οι τριφασικές συσκευές όπως και τα τριφασικά συστήματα ασφαλείας εδώ δεν θα εξεταστούν.

### 3. Θωράκιση των ευαίσθητων οργάνων από τις ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές

Τα ευαίσθητα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά όργανα είναι ευάλωτα στις ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές. Για προστασία τους, τα όργανα αυτά περιβάλλονται από ένα μεταλλικό κέλυφος, το οποίο δεν επιτρέπει την είσοδο των εξωτερικών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων στο εσωτερικό του. Εδώ αδύνατο σημείο είναι τα καλώδια σύνδεσης με την είσοδο της συσκευής, που λειτουργούν ως κεραίες και εισάγουν την ηλεκτρική παρεμβολή στο εσωτερικό του οργάνου. Για να μειωθούν και αυτές οι παρεμβολές, η σύνδεση γίνεται με ειδικά καλώδια που περιβάλλονται από μία εύκαμπτη χάλκινη πλεξούδα, το λεγόμενο μπλεντάζ, το οποίο συνδέεται με το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου και επομένως αποτελεί την εύκαμπτη προέκτασή του.

### 4. Προορισμός της γείωσης και του ρελέ προστασίας

Πρέπει να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι η Γη, δηλαδή το έδαφος, σε βάθος όπου το χώμα είναι πάντα υγρό (πάνω από 50 cm), είναι ηλεκτρικά αγωγίμο και επομένως η επιφάνεια της Γης, καθώς είναι πολύ μεγάλη, επηρεάζει άμεσα τις ευαίσθητες ηλεκτρικές και ηλεκτρονικές διατάξεις, όταν τα ηλεκτρικά δυναμικά του εδάφους και του μεταλλικού κελύφους διαφέρουν και μεταβάλλονται. Για να εξουδετερωθεί και αυτή η παρεμβολή, το μεταλλικό κέλυφος το γειώνουν και με τον τρόπο αυτό εξαλείφεται η ηλεκτρική παρεμβολή που προκαλείται από την ανεπιθύμητη αυτή διαφορά δυναμικού.



Σχήμα 20. Προστασία του χρήστη μέσω γείωσης του οργάνου.

Στη χρησιμότητα της γείωσης πρέπει να προσθέσουμε ακόμη μία: η γείωση του οργάνου προστατεύει τον χρήστη από την ηλεκτροπληξία, που μπορεί να προκληθεί από μία βλάβη στη μόνωση των ρευματοφόρων καλωδίων της συσκευής.

Όργανα που τροφοδοτούνται με μπαταρίες των 1,5 ή 9 V είναι ασφαλή. Αλλά συσκευές που τροφοδοτούνται από το δίκτυο της ΔΕΗ με 220 V, εν γένει είναι επικίνδυνες. Στη μείωση του κινδύνου ή ακόμη και στην εξάλειψή του αποσκοπεί η μέθοδος τροφοδοσίας με *ρελέ προστασίας και τρία καλώδια*, η σχηματική παράσταση της οποίας δίνεται στο Σχ. 20.

Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος αυτή αποσκοπεί στην *εξάλειψη κάθε πιθανότητας το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου να βρεθεί υπό τάση*, γεγονός που θα θέσει σε άμεσο κίνδυνο τον

χρήστη της συσκευής. Ίδια μέθοδος προστασίας του χρήστη χρησιμοποιείται και στις οικιακές συσκευές.

### **5. Γείωση του οργάνου και προστασία του χρήστη από την ηλεκτροπληξία**

Θα παρακάμψουμε προς το παρόν το ρελέ προστασίας (είναι ειδική ηλεκτρική μονάδα που διακόπτει τη σύνδεση με το δίκτυο όταν δημιουργείται διαρροή ηλεκτρικού ρεύματος προς το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου (στον ηλεκτρικό πίνακα «πέφτει το ρελέ») και θα επικεντρωθούμε στον προορισμό της γείωσης. Έτσι, θεωρούμε, ότι οι επαφές του ρελέ είναι μόνιμως κλειστές και η συσκευή τροφοδοτείται με 220 V.

Στη μέθοδο προστασίας με 3 καλώδια, τα δύο καλώδια είναι ενεργά και διαρρέοντα από το ρεύμα κατανάλωσης της συσκευής, ενώ το τρίτο χρησιμοποιείται για τη γείωση του μεταλλικού κελύφους του οργάνου. Χαρακτηριστικό της συνδεσμολογίας αυτής είναι η γείωση του ενός ενεργού καλωδίου. Οι ηλεκτρολόγοι το αποκαλούν «ο ουδέτερος» και έχει γαλάζια μόνωση από κάποιο πολυμερές. Επομένως, το καλώδιο αυτό, ως προς τη Γη, δεν βρίσκεται υπό τάση και είναι ακίνδυνο για τον ηλεκτρολόγο, σε περίπτωση που αυτός θα το αγγίξει τυχαία. Το άλλο ενεργό καλώδιο, η λεγόμενη «φάση», ως προς τη Γη, έχει εναλλασσόμενο δυναμικό που μεταβάλλεται από -308 έως +308 βολτ (220 V ενεργά), έχει μαύρη μόνωση και είναι επικίνδυνο για όποιον το αγγίξει. Αλλά το άγγιγμα των ενεργών καλωδίων αφορούν την ασφάλεια του ηλεκτρολόγου, που έχει ασφαλώς τη σημασία της, ωστόσο οι κίνδυνοι αυτοί δεν αφορούν τον χρήστη του οργάνου, ο οποίος δεν αγγίζει τα σημεία αυτά.

Ο χρήστης κινδυνεύει όταν με κάποιον τρόπο το προστατευτικό μεταλλικό κέλυφος του οργάνου βρεθεί υπό εναλλασσόμενη τάση, ως προς τη Γη. Αυτό μπορεί να συμβεί εάν, κατά παράβαση των κανόνων ασφαλείας, το μεταλλικό κέλυφος δεν είναι γειωμένο, η μόνωση του καλωδίου «φάσης» υποστεί κάποια βλάβη και δημιουργηθεί διαρροή ρεύματος από το καλώδιο «φάσης» προς το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου ( $R_{\text{διαρροής}}$ , στο Σχ. 20). Στην περίπτωση αυτή το μεταλλικό κέλυφος θα βρίσκεται υπό τάση και επομένως ένα άγγιγμα του οργάνου με το χέρι θα προκαλέσει στον χρήστη ηλεκτροπληξία, το ρεύμα (η ενεργός τιμή) της οποίας θα είναι  $220 \text{ V} / (R_{\text{διαρρ}} + \Sigma R)$ , όπου  $R_{\text{διαρροής}}$  είναι η ωμική αντίσταση της διαρροής, ενώ το άθροισμα  $\Sigma R$  είναι η συνολική αντίσταση στη διαδρομή: χέρι-πόδια-υποδήματα-δάπεδο-Γη. Βλέπουμε ότι ο προορισμός της γείωσης είναι να αποτραπούν καταστάσεις όπου το μεταλλικό κέλυφος της συσκευής βρίσκεται υπό εναλλασσόμενη τάση ως προς τη Γη.

Ωστόσο πιο επικίνδυνη είναι η κατάσταση όταν, και πάλι, κατά παράβαση των κανόνων ασφαλείας, το μεταλλικό κέλυφος δεν είναι γειωμένο, υπάρχει διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το μεταλλικό κέλυφος, ο χρήστης με το ένα χέρι αγγίζει το μεταλλικό κέλυφος, ενώ με το άλλο, κάποιο καλά γειωμένο αντικείμενο του κτιρίου, όπως, για παράδειγμα, είναι οι σωληνώσεις ύδρευσης, θέρμανσης, μπαταρίες θέρμανσης, βρύση, υγρός τοίχος, σκυρόδερμα του μπετόν κ.λπ. Εδώ ουσιαστικά ο χρήστης με το ένα χέρι αγγίζει το γειωμένο ενεργό καλώδιο, ενώ με το άλλο, μέσω της αντίστασης διαρροής, αγγίζει το ενεργό καλώδιο της «φάσης». Η επικινδυνότητα αυτής της κατάστασης σχετίζεται με το γεγονός ότι η αντίσταση χέρι-χέρι είναι πολύ μικρότερη από την αντίσταση που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή την αντίσταση χέρι-πόδια-υποδήματα-δάπεδο-Γη.

Ο κίνδυνος της ηλεκτροπληξίας *αίρεται* όταν το μεταλλικό κέλυφος είναι γειωμένο και επομένως το δυναμικό του είναι πάντα όσο και το δυναμικό της Γης. Αλλά ακόμη και όταν η διαρροή είναι μεγάλη (το ρελέ προστασίας δεν επιτρέπει διαρροή πάνω από 30 mA), το δυναμικό (είναι εναλλασσόμενο) του κελύφους λίγο θα αυξηθεί, αλλά η αύξηση αυτή δεν θα υπερβαίνει τα μερικά βολτ. Η μικρή αυτή ακίνδυνη τάση δημιουργείται από το ρεύμα διαρροής λόγω πτώσης τάσης στο καλώδιο της γείωσης, όταν το μήκος του είναι μεγάλο.

### **6. Προορισμός του ρελέ προστασίας**

Το ρελέ προστασίας βρίσκεται συνήθως στον πίνακα τροφοδοσίας του Εργαστηρίου ή της οικίας και προστατεύει τον χρήστη από όλες τις ηλεκτρικές συσκευές και επιστημονικά όργανα

που βρίσκονται στο Εργαστήριο. Στο Σχ. 13, η συσκευή τροφοδοτείται από το δίκτυο της ΔΕΗ μέσω του ρελέ, όταν οι επαφές του είναι κλειστές.

Στα εργαστήρια και ιδιωτικές κατοικίες, η ηλεκτρικές συσκευές και τα διάφορα μετρητικά και επιστημονικά όργανα τροφοδοτούνται από το δίκτυο της ΔΕΗ πάντα μέσω του ρελέ προστασίας, η αποστολή του οποίου είναι να διακόψει τη σύνδεση του οργάνου με το δίκτυο της ΔΕΗ, όταν σημειωθεί διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το μεταλλικό κέλυφος, αλλά υπό τον όρο ότι η συνολική διαρροή υπερβαίνει τα 10 ή 30 mA, ανάλογα με τον τύπο του ρελέ.

Υπάρχουν πολλοί τύποι ρελέ προστασίας. Στο διαφορικό ρελέ που βλέπουμε Σχ. 13, γίνεται σύγκριση των ρευμάτων στα δύο ενεργά καλώδια, δηλαδή των  $I_1$  και  $I_2$ . Όταν η μόνωση των καλωδίων είναι καλή και επομένως η διαρροή είναι μηδέν, ισχύει

$$I_1 = I_2,$$

οι επαφές είναι κλειστές και το ρελέ τροφοδοτεί το Εργαστήριο με 220 V. Το ρελέ ενεργοποιείται όταν  $I_1 > I_2$  και, επιπλέον,

$$I_1 \geq I_2 + 30 \text{ mA}.$$

Η συνθήκη αυτή δημιουργείται όταν εμφανίζεται διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το γειωμένο μεταλλικό κέλυφος κάποιου οργάνου του εργαστηρίου. Όταν η συνολική διαρροή υπερβαίνει τα 30 mA, «πέφτει το ρελέ», δηλαδή ο διακόπτης του ρελέ από τη θέση «άνω» μετακινείται στη θέση «κάτω», με επακόλουθο να ανοίξουν οι επαφές του ρελέ. Επομένως, η διαρροή των 30 mA ενεργοποιεί το ρελέ και αυτός ανοίγει της επαφές. Από τη στιγμή αυτή το Εργαστήριο παύει να τροφοδοτείται με 220 V. Το ρελέ επαναφέρεται στην αρχική κατάσταση μόνο μετά την εξάλειψη της διαρροής, «σηκώνοντας» το σχετικό διακόπτη στον πίνακα τροφοδοσίας του Εργαστηρίου. Όπως βλέπουμε, μεταξύ άλλων, η «πτώση του ρελέ» μας πληροφορεί ότι στην αίθουσα του εργαστηρίου, σε κάποιο ή κάποια όργανα υπάρχει διαρροή ρεύματος από τη «φάση» προς το μεταλλικό κέλυφος και ότι η τιμή της συνολικής διαρροής υπερβαίνει τα 30 mA.

Το ρελέ προστασίας ενεργοποιείται ακόμη και όταν  $I_1 < I_2$ , δηλαδή όταν η διαρροή προς το κέλυφος γίνεται από «τον ουδέτερο», ιδιότητα που είναι πολύ χρήσιμη για την προστασία και του ηλεκτρολόγου.

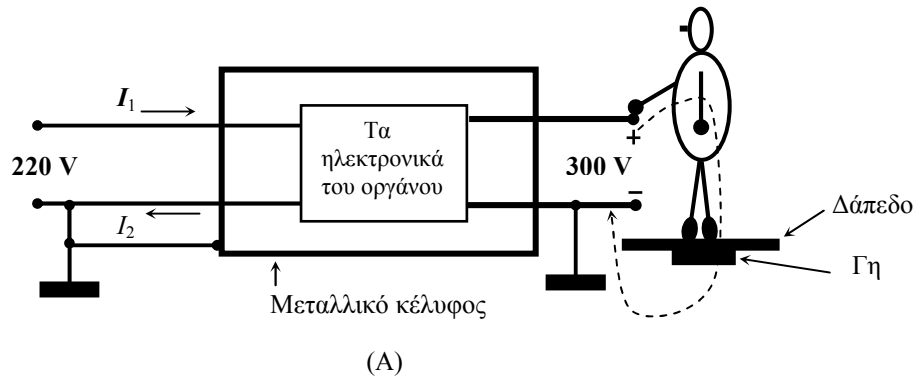
## 7. Επικίνδυνες πηγές τάσης και επικίνδυνες καταστάσεις

Όλες οι ηλεκτροπληξίες με τάσεις άνω των 30 V θεωρούνται επικίνδυνες. Πλην όμως, η επικινδυνότητα της ηλεκτροπληξίας με 40 V διαφέρει σαφώς από αυτή με 300 V. Γενικότερα, ακίνδυνες θεωρούνται οι πηγές τάσης που διαθέτουν περιοριστή ρεύματος (current limiter), ρυθμισμένο στα 5 mA ή σε μικρότερη τιμή όπου οι πειραματικές συνθήκες το επιτρέπουν. Ο περιοριστής ρεύματος (current limiter) είναι μία ειδική ηλεκτρονική μονάδα εντός του τροφοδοτικού, ο οποίος αυτόματα και ακαριαία μηδενίζει την τάση της πηγής όταν το ρεύμα κατανάλωσης πλησιάζει μία προκαθορισμένη τιμή (5 mA). Για παράδειγμα, στην Άσκηση 10, «Μελέτη του πυκνωτή κ.λπ.», στο τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 200 V, ο περιοριστής ρεύματος είναι ρυθμισμένος στο 0,1 mA.

*Τονίζουμε ιδιαίτερα*, ότι στα τροφοδοτικά που δε διαθέτουν περιοριστή ρεύματος, τίποτα δεν μας προστατεύει όταν με τα δύο χέρια αγγίζουμε τους δύο πόλους του τροφοδοτικού.

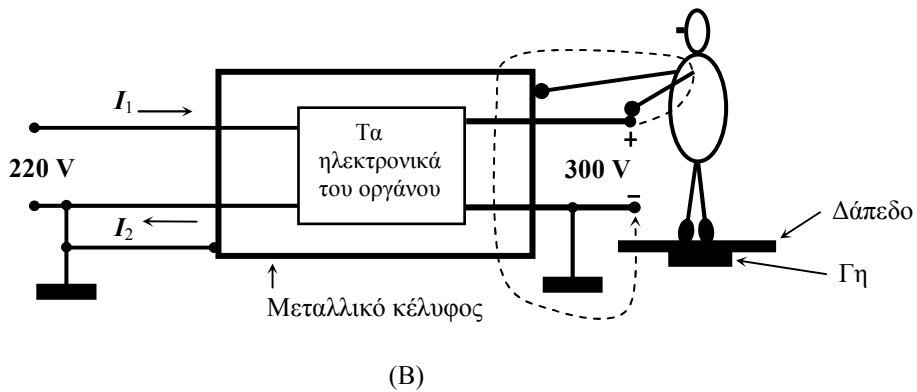
Ιδιαίτερα επικίνδυνα είναι τα τροφοδοτικά που παράγουν τάσεις άνω των 100 V και δε διαθέτουν περιοριστή ρεύματος. Το ρελέ προστασίας και η γείωση του τροφοδοτικού προστατεύουν τον ερευνητή μόνο από την τάση της ΔΕΗ. Τα μέσα αυτά δεν τον προστατεύουν από τις δευτερεύοντες τάσεις που παράγουν τα τροφοδοτικά. Για να βεβαιωθούμε, αρκεί να εξετάσουμε την επικινδυνότητα δύο περιπτώσεων ηλεκτροπληξίας από ένα τροφοδοτικό των +300 V (Άσκηση 14, *Μέτρηση του λόγου e/m*), που παρουσιάζονται στα Σχ. 21 και 22.

Στην περίπτωση Α (Σχ. 21), ακίνδυνος είναι ο πόλος ο αρνητικός, που είναι γειωμένος, ενώ επικίνδυνος είναι ο θετικός. Έστω, ότι κατά λάθος ο χρήστης αγγίζει με το ένα χέρι το



**Σχήμα 21.** Σχετικά «ακίνδυνα» ηλεκτροπληξία τύπου χέρι-πόδια, σε τροφοδοτικό με έναν πόλο γειωμένο.

θετικό πόλο του τροφοδοτικού. Εδώ το ρεύμα ηλεκτροπληξίας εξαρτάται από τα 300 V, αλλά και από τη συνολική ωμική αντίσταση του κυκλώματος στη διαδρομή: χέρι-πόδια-υποδήματα-δάπεδο-Γη. Η αντίσταση αυτή είναι συνήθως μεγάλη.



**Σχήμα 22.** Επικίνδυνη ηλεκτροπληξία τύπου χέρι-χείρι σε τροφοδοτικό με έναν πόλο γειωμένο.

Πολύ επικίνδυνη είναι η κατάσταση **B** (Σχ. 22), όπου το δεύτερο χέρι αγγίζει το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου ή κάποιου καλά γειωμένου αντικειμένου της κτιριακής εγκατάστασης.

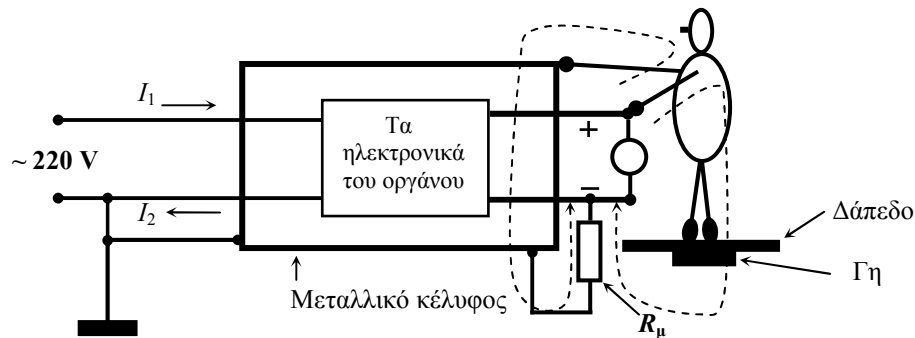
Στο Σχ. 22, μέσω γείωσης, το δεύτερο χέρι ουσιαστικά αγγίζει τον αρνητικό πόλο της πηγής. Εδώ το ρεύμα ηλεκτροπληξίας είναι πολύ μεγαλύτερο, καθώς εξαρτάται κυρίως από την αντίσταση χέρι-χείρι, που είναι πολύ μικρότερη απ' ό,τι στην περίπτωση **A**. Εδώ η μόνη προστασία προέρχεται από τον περιοριστή ρεύματος (current limiter), εάν υπάρχει, ο οποίος αυτόματα και ακαριαία μειώνει την τάση της πηγής, όταν το ρεύμα τείνει να πλησιάσει μία ορισμένη τιμή. Η απουσία του περιοριστή κάνει την κατάσταση **B** πολύ επικίνδυνη\_και, επομένως, πρέπει με κάθε τρόπο να αποτρέπεται έστω με παθητικά μέσα ή με χρήση ειδικά προστατευμένων καλωδίων συναρμολόγησης κ.λπ.

### 8. Λειτουργία του τροφοδοτικού σε κατάσταση Flouting mode

Σε μερικά τροφοδοτικά, παρότι το μεταλλικό κέλυφος είναι πάντα γειωμένο, κανένας από τους δύο πόλους της τάσης εξόδου δεν είναι γειωμένος. Συνήθως, στα τροφοδοτικά αυτά ο ένας από τους δύο πόλους γειώνεται, όταν η τροφοδοτούμενη συσκευή για κάποιο λόγο πρέπει οπωσδήποτε να είναι γειωμένη. Έτσι, ποιος από τους δύο πόλους θα γειωθεί αποφασίζει ο ερευνητής, ανάλογα με το αν επιθυμεί πηγή θετικής ή πηγή αρνητικής τάσης.

Τονίζουμε ακόμη μία φορά, ότι στα τροφοδοτικά που δε διαθέτουν current limiter, τίποτα δεν μας προστατεύει όταν με τα δύο μας χέρια αγγίζουμε τους δύο πόλους του τροφοδοτικού. Η κατάσταση διαφοροποιείται όταν με το ένα χέρι αγγίζουμε το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου,

ενώ με το άλλο, τον έναν από τους δύο πόλους του τροφοδοτικού. Όταν ο ένας πόλος είναι γειωμένος, αυτό θα προκαλέσει επικίνδυνη ηλεκτροπληξία όταν αγγίζουμε τον μη γειωμένο πόλο (κατάσταση Β, Σχ. 22). Όταν όμως οι δύο πόλοι «είναι στον αέρα», δηλαδή το τροφοδοτικό λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode*, η ηλεκτροπληξία που θα υποστούμε θα είναι σχεδόν ακίνδυνη!



**Σχήμα 23.** Σχετικά «ακίνδυνη» ηλεκτροπληξία τύπου χέρι-χέρι σε τροφοδοτικό που λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode*.

Το τροφοδοτικό μπορεί (πρέπει) να λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode* όταν στην ηλεκτρονική συσκευή που τροφοδοτείται κανένας από τους δύο πόλους δεν είναι γειωμένος, δηλαδή και η συσκευή λειτουργεί σε κατάσταση *Flouting mode* ή απουσιάζει σε αυτή το μεταλλικό κέλυφος κ.ο.κ. Είναι άξιο προσοχής το γεγονός, ότι η κατάσταση αυτή είναι πιο ασφαλής!

Πρέπει να σημειώσουμε ότι σε λειτουργία *Flouting mode* κανένας από τους δύο πόλους δεν είναι απολύτως ακίνδυνος, όπως είναι ο γειωμένος πόλος στα κοινά τροφοδοτικά. Πλην όμως, η λειτουργία *Flouting mode* είναι προτιμότερη καθώς στα τροφοδοτικά αυτά μεριμνάτε για την ασφαλή και καλή μόνωση των δύο πόλων από το μεταλλικό κέλυφος του τροφοδοτικού, που είναι συνήθως γειωμένο.

Αν η ηλεκτροπληξία που βλέπουμε στο Σχ. 22 είναι επικίνδυνη, σε κατάσταση *Flouting mode* (Σχ. 23), σε περίπτωση ηλεκτροπληξίας με δύο χέρια, το ρεύμα ηλεκτροπληξίας θα μειωθεί σε μεγάλο βαθμό από τη μεγάλη αντίσταση της μόνωσης  $R_{\mu}$ , η οποία είναι της τάξης  $10^7$ - $10^{10}$  Ω.

Εδώ το συνολικό ρεύμα ηλεκτροπληξίας θα διακλαδωθεί σε δύο διαδρομές, ακολουθώντας δύο ξεχωριστά κλειστά κυκλώματα. Στο πρώτο κύκλωμα το ρεύμα ακολουθεί τη διαδρομή: θετικός πόλος-χέρι-χέρι-Γη-μόνωση αρνητικού πόλου-αρνητικός πόλος της πηγής.

Στο δεύτερο κύκλωμα το ρεύμα ακολουθεί τη διαδρομή: χέρι-πόδια-δάπεδο-Γη-μόνωση αρνητικού πόλου-αρνητικός πόλος του τροφοδοτικού. Βλέπουμε, ότι στα δύο κυκλώματα προστίθεται η αντίσταση μόνωσης του αρνητικού πόλου  $R_{\mu}$ , όπως αυτή εκδηλώνεται ως προς το μεταλλικό κέλυφος του τροφοδοτικού. Το γεγονός αυτό προκαλεί μεγάλη μείωση του ρεύματος ηλεκτροπληξίας, στο βαθμό που αυτό συγκρίνεται με την περίπτωση όπου ο αρνητικός πόλος του τροφοδοτικού είναι γειωμένος (περίπτωση Β, Σχ. 22). Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε, ότι αυτό που μας προστατεύει σε αυτήν την ηλεκτροπληξία είναι η μεγάλη τιμή της αντίστασης μόνωσης  $R_{\mu}$ . Εδώ, το «χτύπημα» που αισθάνεται κανείς στην πρώτη στιγμή οφείλεται στην εκφόρτωση του παρασιτικού πυκνωτή που δρα παράλληλα με την αντίσταση  $R_{\mu}$  και είναι της τάξης μερικών εκατοντάδων pF.

Σε κατάσταση *Flouting mode*, περίπου ίδιας έντασης ηλεκτροπληξία θα υποστούμε εάν, κατά λάθος, αγγίζουμε τον αρνητικό πόλο της πηγής, ενώ το άλλο χέρι θα αγγίζει το μεταλλικό κέλυφος του οργάνου ή κάποιου γειωμένου αντικείμενου της κτιριακής εγκατάστασης. Και στην περίπτωση αυτή, από την ηλεκτροπληξία θα μας προστατεύσει η μεγάλη αντίσταση

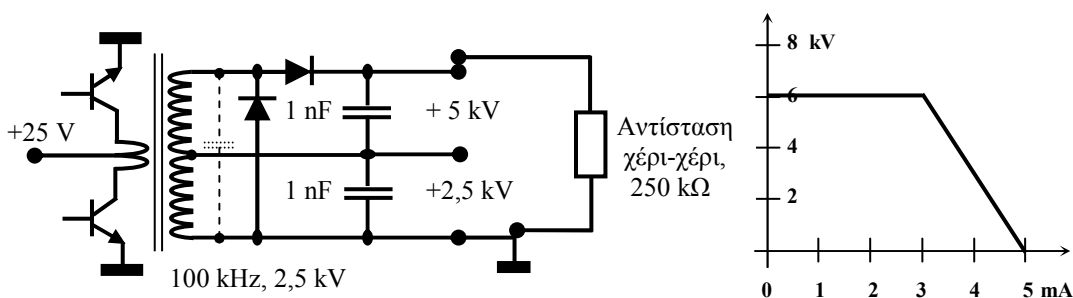
μόνωσης ( $R_{\mu}$ ) του θετικού πόλου, όπως αυτή εκδηλώνεται ως προς το μεταλλικό κέλυφος του τροφοδοτικού.

Ωστόσο και σε κατάσταση *Flouting mode*, αν το τροφοδοτικό δε διαθέτει περιοριστή ρεύματος, τίποτα δεν μας προστατεύει όταν με τα δύο χέρια αγγίζουμε τους δύο πόλους του τροφοδοτικού. Το άγγιγμα αυτό είναι επικίνδυνο για τη ζωή, όταν το τροφοδοτικό παράγει τάσεις άνω των 30 V και, πολύ επικίνδυνη, όταν η παραγόμενη τάση είναι άνω των 100 V.

### 9. Ασφαλείς πηγές υψηλής τάσης

Σε πειράματα όπου χρησιμοποιούνται τάσεις άνω των 1000 V (π.χ. 5 kV στις ασκήσεις *Περίθλαση ηλεκτρονίων*, *Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας*, *Φαινόμενο Κερ* κ.λπ.), πιο ασφαλή είναι τα τροφοδοτικά που λειτουργούν με ταλαντωτές, σε συχνότητες της τάξης 100 kHz, με μεγάλο (100) πολλαπλασιασμό της εναλλασσόμενης τάσης, η οποία στη συνέχεια ανορθώνεται και εξομαλύνεται με πυκνωτές. Συνήθως, ο ταλαντωτής λειτουργεί σε συχνότητα συντονισμού του δευτερεύοντος τυλίγματος ενός μετασχηματιστή, ο οποίος με την παρασιτική χωρητικότητα δημιουργεί ένα παράλληλο κύκλωμα *LC*. Τα τροφοδοτικά αυτά λειτουργούν ως πηγή τάσης με μικρή εσωτερική αντίσταση μόνο όταν το ρεύμα κατανάλωσης δεν υπερβαίνει τα 3 mA (Σχ. 24).

Σκόπιμα, για λόγους ασφαλείας, όταν η κατανάλωση ρεύματος υπερβαίνει τα 3 mA, η λειτουργία του τροφοδοτικού αρχίζει να γίνεται προβληματική, καθώς η έξοδος εμφανίζει μία μεγάλη εσωτερική αντίσταση, της τάξης 2 MΩ ( $\Delta U/\Delta I = 2 \times 10^6 \Omega$ ). Στα 5 mA κατανάλωσης ο ταλαντωτής παύει τη λειτουργία του. Με τον τρόπο αυτό όλο το σύστημα λειτουργεί και ως περιοριστής ρεύματος στα 5 mA.



Σχήμα 24. Σχετικά «ασφαλής» πηγή υψηλής τάσης με ταλαντωτή στα 100 kHz,

$$d.c, I \leq 3 \text{ mA}, I_{max} = 5 \text{ mA}.$$

Επιπλέον, στα τροφοδοτικά με ταλαντωτές η χωρητικότητα των πυκνωτών εξομάλυνσης της ανορθωμένης τάσης είναι της τάξης 1 nF, δηλαδή είναι μικρότερη  $10^4$ - $10^5$  φορές από ότι στα συστήματα που εξομαλύνουν την ανορθωμένη τάση στα 50 Hz. Από τη σκοπιά ασφαλείας, η μικρή χωρητικότητα των πυκνωτών εξομάλυνσης είναι προτιμότερη και συνιστά μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των τροφοδοτικών. Το πόσο χρήσιμη είναι η μικρή χωρητικότητα θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Έστω, ότι η πηγή παράγει τάση 5000 V και ότι ο σπουδαστής άθελα αγγίζει τους δύο πόλους με τα χέρια, η αντίσταση των οπίων είναι περίπου 250 kΩ (Σχ. 24).

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το ρεύμα ηλεκτροπληξίας είναι

$$I_0 = (5000 \text{ V}) / (250 \times 10^3 \Omega) = 2 \times 10^{-2} \text{ A} \quad \text{ή} \quad 20 \text{ mA},$$

το οποίο αντλείται κυρίως από τους πυκνωτές εξομάλυνσης (στο Σχ. 14,  $C_{σειράς} = 0,5 \text{ nF}$ ) και μειώνεται εκθετικά με σταθερά χρόνου

$$\tau = RC = (2,5 \times 10^5 \Omega) \times (0,5 \times 10^{-9} \text{ F}) = 125 \times 10^{-6} \text{ s} = 125 \mu\text{s}.$$

Πρακτικά, σχεδόν αμέσως, δηλαδή σε χρόνο περίπου 20-40 περιόδων, ο ταλαντωτής θα τεθεί εκτός λειτουργίας, καθώς για να διατηρηθεί η τάση στους πυκνωτές στα αρχικά επίπεδα, οι ανορθώτριες διόδους πρέπει να τους τροφοδοτούν με ρεύματα πολύ μεγαλύτερα από 5 mA, τα οποία στο πρωτεύον τύλιγμα του μετασχηματιστή είναι εκατό φορές μεγαλύτερα και τα τρανζίστορ του ταλαντωτή αδυνατούν (σκόπιμα) να ανταπεξέλθουν στις τιμές αυτές. Βλέπουμε, ότι μεταξύ άλλων, αυτό που κάνει την ηλεκτροπληξία αυτή σχετικά ακίνδυνη είναι η μικρή χωρητικότητα των πυκνωτών εξομαλύνσεις, καθώς εδώ το «χτύπημα» των 20 mA διαρκεί μόνο

$$3\tau = 3RC = 3 \times 125 \mu\text{s} = 375 \mu\text{s}.$$

### 10. Παθητικά μέσα προστασίας

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ο περιοριστής ρεύματος είναι μία ειδική ηλεκτρονική μονάδα μέσα στο τροφοδοτικό, που «παρακολουθεί» το ρεύμα κατανάλωσης και «ρίχνει» την τάση όταν το ρεύμα πλησιάζει μία ορισμένη τιμή. Ωστόσο τον περιοριστή αυτόν δεν τον διαθέτουν όλα τα τροφοδοτικά.

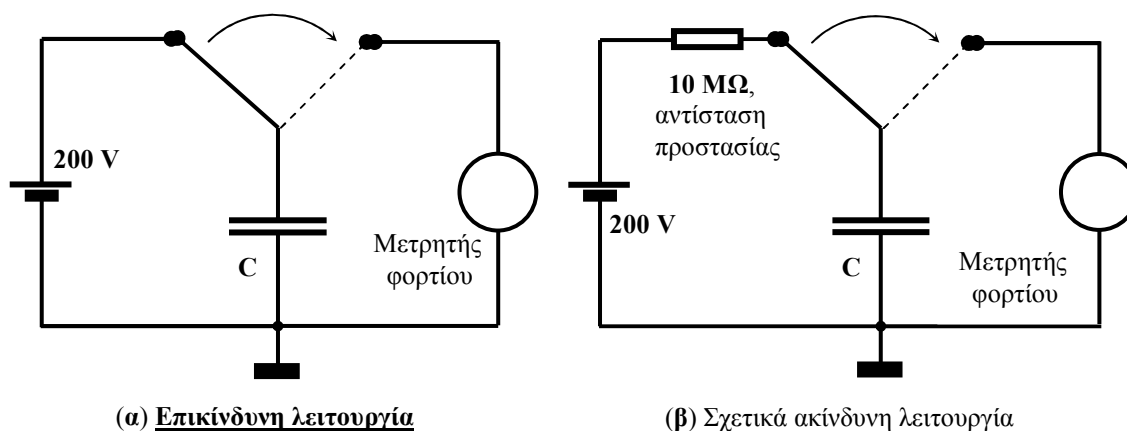
Όταν γίνεται χρήση τροφοδοτικών δίχως περιοριστή, σε πειραματικές διατάξεις όπου η κατανάλωση του ρεύματος είναι πολύ μικρή ή σχεδόν μηδενική, καλή προστασία από τα μεγάλα ρεύματα ηλεκτροπληξίας προσφέρουν και τα παθητικά μέσα προστασίας. Στην απλούστερη μορφή το μέσο αυτό είναι μία ωμική αντίσταση μεγάλης τιμής.

Για παράδειγμα, η μελέτη του πυκνωτή (μεταλλικοί δίσκοι με διάμετρο 20 cm, Άσκηση 10, Ε.Μ.Π.), μπορεί να γίνει σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα που δίνεται στο Σχ.25α, όπου στην πρώτη φάση ο πυκνωτής φορτίζεται στα 200 V και, στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός μεταγωγού, ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω ενός γειωμένου μετρητή φορτίου. Το τελευταίο επιβάλλει γείωση και του αρνητικού πόλου της πηγής.

Παρά τη γείωση, η διάταξη αυτή είναι επικίνδυνη για τους σπουδαστές εάν η πηγή των 200 V δεν έχει περιοριστή ρεύματος (στην Άσκηση 10, το limit είναι στα 0,1 mA). Σημειώνουμε, ότι τέτοια πηγή πρέπει να απομακρύνεται από τα εκπαιδευτικά εργαστήρια.

Αλλά αν για κάποιον λόγο λείπει ο περιοριστής, ενώ η αντικατάσταση της πηγής είναι αδύνατη, ικανοποιητική προστασία από την ηλεκτροπληξία μπορεί να προσφέρει και μία απλή ωμική αντίσταση των 10 MΩ, (Σχ. 25β), η οποία περιορίζει ένα ενδεχόμενο ρεύμα ηλεκτροπληξίας σε επίπεδα

$$I = \frac{U}{\Sigma R} = \frac{200 \text{ V}}{R_{\chi-\chi} + 10^7 \Omega} \leq \frac{200 \text{ V}}{10^7 \Omega} = 20 \times 10^{-6} \text{ A} = 20 \mu\text{A},$$



Σχήμα 25. Παθητικά μέσα προστασίας με χρήση μεγάλης ωμικής αντίστασης.

που είναι ακίνδυνα, όταν, για παράδειγμα, ο σπουδαστής με το ένα χέρι αγγίζει τη Γη ή κάποιο γειωμένο αντικείμενο, ενώ με το άλλο χέρι αγγίζει τα σημεία του κυκλώματος που βρίσκονται μετά την αντίσταση προστασίας, δηλαδή

- στο δεξί άκρο της αντίστασης προστασίας
- στον μεταγωγό
- στον «πάνω» δίσκο του πυκνωτή (ο «κάτω» είναι γειωμένος)
- στην είσοδο του μετρητή φορτίου κ.λπ.

*Τονίζουμε* ότι τα μέρη του κυκλώματος που βρίσκονται *πριν από την αντίσταση προστασίας*, δίχως τον περιοριστή παραμένουν *επικίνδυνα*. Συνεπώς, στο τροφοδοτικό που δε διαθέτει περιοριστή ρεύματος πρέπει με κάθε τρόπο να αποτρέπεται η προσπέλαση στα σημεία αυτά.

Ως προς την ακρίβεια του πειράματος, η παρουσία της αντίστασης προστασίας δεν επιφέρει κάποια αξιολογή μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου που συσσωρεύει ο πυκνωτής. Ο πυκνωτής, σε χρόνο  $\tau = 3RC$ , που είναι περίπου  $3 \times (10^7 \Omega) \times (10^{-10} \text{ F}) = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$ , θα φορτιστεί στα 200 V, ωστόσο υπό τον όρο ότι η αντίσταση διαρροής του πυκνωτή και των καλωδίων συνδεσμολογίας είναι εκατοντάδες ή χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από τα 10 MΩ της αντίστασης προστασίας. Συνήθως ο όρος αυτός τηρείται.

**Σημείωση.** Ο παραπάνω όρος δεν τηρείται όταν η επιφάνεια του μεταγωγέα (είναι από πλεξιγκλάς) αποκτά *μικρή ηλεκτρική αγωγιμότητα*, δηλαδή όταν η θερμοκρασία του εργαστηρίου είναι χαμηλή, η σχετική υγρασία μεγάλη και η επιφάνεια του πλεξιγκλάς είναι καλυμμένη με λεπτό στρώμα σκόνης (Χειμώνας ή βροχερός καιρός). Ίδια προβλήματα *επιφανειακής αγωγιμότητας* παρατηρούνται και στην Άσκηση *Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας* (Ε.Μ.Π.), η οποία μερικές φορές είναι τόσο μεγάλη που κάνει αδύνατη τη διεξαγωγή της Άσκησης!

Αυτό που πρέπει να προσέξει κανείς εδώ είναι η *ακριβής αλλά και ασφαλής* μέτρηση της τάσης της πηγής. Για να γίνει η μέτρηση της τάσης σωστά, ο μετρητής τάσης πρέπει να συνδέεται *πριν* από την αντίσταση προστασίας. Σε αντίθετη περίπτωση η ένδειξη του μετρητή θα είναι έντονα αλλοιωμένη (50 % της πραγματικής!), καθώς η αντίσταση προστασίας και η εσωτερική αντίσταση του μετρητή (συνήθως 10 MΩ) δημιουργούν έναν ανεπιθύμητο διαιρέτη τάσης. Σημειώνουμε, ότι το σημείο αυτό *είναι επικίνδυνο* και επομένως είναι προτιμότερο η μετρητής τάσης να είναι ενσωματωμένος στο τροφοδοτικό και μόνιμα (εσωτερικά) συνδεδεμένος με την έξοδο της πηγής.

Όταν οι εκπαιδευτικοί λόγοι επιβάλλουν τη σύνδεση ενός μετρητή τάσης, τότε η συναρμολόγηση του κυκλώματος πρέπει να γίνεται με κλειστό το τροφοδοτικό και με ειδικά καλώδια συνδεσμολογίας, τα λεγόμενα «ασφαλή», στα οποία τα δύο μεταλλικά άκρα *είναι καλυμμένα πάντα* με μετακινούμενους κυλίνδρους (μονωτικές «φούστες») από κάποιο ασφαλές και καλό μονωτικό υλικό.