

# Άσκηση 14

## Μέτρηση του λόγου $e/m$ του ηλεκτρονίου

### 14.1. Σκοπός

Στην Άσκηση αυτή μελετάται η κίνηση δέσμης ηλεκτρονίων μέσα σε κάθετο ομογενές μαγνητικό πεδίο και προσδιορίζεται ο λόγος  $e/m$  (φορτίο προς μάζα) του ηλεκτρονίου.

### 14.2. Εισαγωγή

Ένας απλός τρόπος μέτρησης του λόγου  $e/m$  βασίζεται στην κίνηση των ηλεκτρονίων σε ένα κάθετο ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$ .

Στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια διαγράφουν μία κυκλική τροχιά, η ακτίνα της οποίας μπορεί να υπολογιστεί εξισώνοντας τη δύναμη Lorentz με την κεντρομόλο, δηλαδή από τις σχέσεις

$$F_L = e\nu B \quad \text{και} \quad F_C = \frac{m\nu^2}{r}, \quad (14.1\alpha, \beta)$$

όπου  $\nu$  είναι οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων με τις οποίες αυτά εισέρχονται στο κάθετο μαγνητικό πεδίο.

Επειδή ο πειραματικός προσδιορισμός των ταχυτήτων είναι δύσκολος, στην πράξη προτιμάται η ταχύτητες των ηλεκτρονίων να προσδιορίζονται έμμεσα, από τη διαφορά δυναμικού  $U_a$  που τα επιτάχυνε έως την ταχύτητα  $\nu$ , αξιοποιώντας τη σχέση:

$$\frac{m\nu^2}{2} = eU_a. \quad (14.2)$$

Από τις παραπάνω τρεις σχέσεις ο λόγος  $e/m$  υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_a}{r^2 B^2}. \quad (14.3)$$

Το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από ένα ζευγάρι πηνίων Helmholtz, όπου στον κεντρικό χώρο μεταξύ των πηνίων δημιουργείται ένα αρκετά ομογενές μαγνητικό πεδίο, η ένταση του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B = \frac{8}{\sqrt{125}} \times \frac{\mu_0 N I}{R}, \quad (14.4)$$

όπου  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού,  $N$  είναι ο αριθμός των σπειρών στα πηνία,  $R$  είναι η ακτίνα των πηνίων και  $I$  είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τα δύο πηνία.

Από τις σχέσεις (14.3) και (14.4), για το λόγο  $e/m$  προκύπτει η σχέση:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_a}{r^2 B^2} = \frac{250R^2 U_a}{64\mu_0^2 N^2 r^2 I^2} = \frac{250R^2}{64\mu_0^2 N^2} \times \frac{U_a}{r^2 I^2} \quad (14.5)$$

### 14.3. Μέθοδος

Από τη σχέση (14.5), ο λόγος  $e/m$  μπορεί να μετρηθεί μέσω μέτρησης της τάσης επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων  $U_a$ , της έντασης του ρεύματος  $I$  που διαρρέει τα πηνία Helmholtz και της ακτίνας της τροχιάς  $r$  που διαγράφουν τα ηλεκτρόνια μέσα στο κάθετο μαγνητικό πεδίο, αν οι τροχιές τους με κάποιον τρόπο γίνουν ορατές.

### 14.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει μία βάση με την ηλεκτρονική λυχνία, ένα ζευγάρι πηνίων Helmholtz και τρία τροφοδοτικά των  $\sim 6,3$  V,  $0-15$  V και  $0-350$  V.

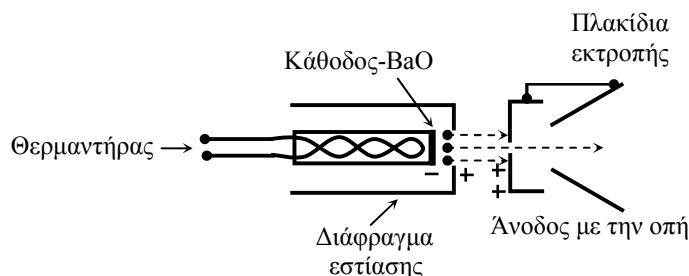
1. Το τροφοδοτικό των  $6,3$  V παράγει εναλλασσόμενη τάση και χρησιμοποιείται για τη θέρμανση της καθόδου του τηλεβόλου ηλεκτρονίων.
2. Το τροφοδοτικό της συνεχούς τάσης  $15$  V χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία των πηνίων Helmholtz με ρεύματα της τάξης  $1 - 2$  A. Στο τροφοδοτικό αυτό η παραγόμενη τάση μπορεί να ρυθμίζεται από  $0$  έως  $15$  V.
3. Το τροφοδοτικό των  $350$  V, η τάση εξόδου του οποίου μπορεί να ρυθμίζεται από  $0$  έως  $350$  V, χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία της ανόδου του τηλεβόλου ηλεκτρονίων, προορισμός του οποίου είναι η δημιουργία μίας λεπτής δέσμης ηλεκτρονίων καθορισμένης ενέργειας.

Στη λυχνία οι τροχιές των ηλεκτρονίων γίνονται ορατές μέσω γόμωσης της με Ήλιο, υπό πίεση  $10$  mTorr. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με ενέργειες της τάξης  $150 - 250$  eV, συγκρούονται με τα άτομα του Ηλίου, τα διεγείρουν και, καθώς αυτά στη συνέχεια αποδιεγείρονται, εκπέμπουν ορατό φως στο σημείο της σύγκρουσης.

#### 14.4.1. Τηλεβόλο ηλεκτρονίων της λυχνίας

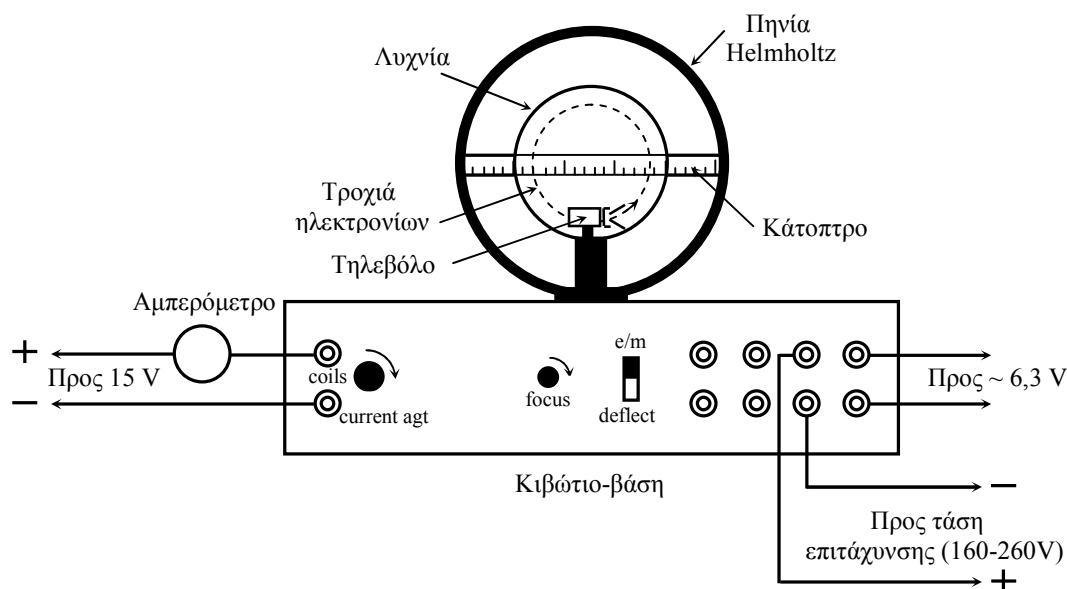
Το τηλεβόλο ηλεκτρονίων της λυχνίας (Σχ.14.1) αποτελείται από 3 βασικά ηλεκτρόδια:

1. Την κάθοδο έμμεσης θέρμανσης, δηλαδή την πηγή των ηλεκτρονίων.
2. Το διάφραγμα εστίασης, που περιβάλλει την κάθοδο και με το ηλεκτρικό του δυναμικό παραλληλίζει τη δέσμη.
3. Την άνοδο, δηλαδή τον συλλέκτη των ηλεκτρονίων, με μία μικρή οπή,  $0,5$  mm, στο κέντρο.



Σχήμα 14.1. Το τηλεβόλο ηλεκτρονίων

- Το θερμαντικό της καθόδου τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση **6,3 V** και ρεύμα **0,3 A**, ενώ η άνοδος τροφοδοτείται από την πηγή υψηλής τάσης (0-350 V).
- Μέρος της ανοδικής τάσης εφαρμόζεται στο διάφραγμα εστίασης. Πίσω από την άνοδο υπάρχουν δύο πλακίδια εκτροπής, στο ίδιο δυναμικό με αυτό της ανόδου, ωστόσο στην Άσκηση αυτή δεν αξιοποιούνται.
- Η κάθοδος του τηλεβόλουβολου είναι έμμεσης θέρμανσης και αποτελείται από έναν κύλινδρο από νικέλιο που θερμαίνεται εσωτερικά. Στη βάση του κυλίνδρου βρίσκεται ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του βαρίου (**BaO**), το οποίο σε θερμοκρασίες **1000-1100 K** αποκτά ιδιότητες ημιαγωγού και εκπέμπει μεγάλο αριθμό ηλεκτρονίων στο κενό.
- Έτσι, όταν στην άνοδο εφαρμόζεται θετικό δυναμικό, για παράδειγμα **+200 V**, (ως προς την κάθοδο ασφαλώς), τα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η κάθοδος επιταχύνονται και συγκρούονται με την άνοδο με ενέργειες **200 eV**. Η δέσμη σχηματίζεται από τα ηλεκτρόνια που διαπερνούν την οπή. Σημειώνουμε ότι τα δυναμικά των ενδιάμεσων ηλεκτροδίων, δηλαδή του διαφράγματος εστίασης, επηρεάζουν τις τροχιές των ηλεκτρονίων, αλλά δεν επηρεάζουν την τελική τους ενέργεια.
- Η αποστολή του διαφράγματος εστίασης είναι να εστιάσει τη δέσμη προκειμένου αυτή να είναι παράλληλη, καθώς η οπή της ανόδου έχει ιδιότητες αποκλίνοντα φακού ηλεκτρονίων (βλ. Παράρτημα 1).
- Η διάταξη περιλαμβάνει ακόμη ένα ψηφιακό αμπερόμετρο για τη μέτρηση του ρεύματος που διαρρέει τα πηνία Helmholtz.



**Σχήμα 14.2.** Το κιβώτιο-βάση, τα πηνία και η τροφοδοσία του τηλεβόλου και των πηνίων

- Στο τροφοδοτικό του τηλεβόλου η υψηλή τάση μπορεί να ρυθμίζεται από **0** έως **350 V**. Η ρύθμιση της τάσης γίνεται με τον βηματικό επιλογέα, με βήματα **50 V**, ενώ οι ενδιάμεσες

τιμές ρυθμίζονται με το κουμπί “**FINE CONTROL**”. Στο τροφοδοτικό αυτό υπάρχει και ένα ενσωματωμένο αναλογικό βολτόμετρο για την ένδειξη της παραγόμενης υψηλής τάσης.

- Η βάση της λυχνίας αξιοποιείται ως στήριγμα των πηνίων και ως κιβώτιο συνδεσμολογίας, μέσω του οποίου τροφοδοτείται η λυχνία και τα πηνία Helmholtz. Το κιβώτιο της βάσης περιέχει 5 ζευγάρια ακροδεκτών, μέσω των οποίων τροφοδοτούνται τα πηνία Helmholtz, τα πλακίδια εκτροπής και τα βασικά ηλεκτρόδια του τηλεβόλου της λυχνίας.
- Ένα **βαθμονομημένο κάτοπτρο**, τοποθετημένο στην **οριζόντια μεγάλη διάμετρο** της λυχνίας, πίσω της, χρησιμεύει για τη μέτρηση της διαμέτρου της κυκλικής τροχιάς των ηλεκτρονίων.

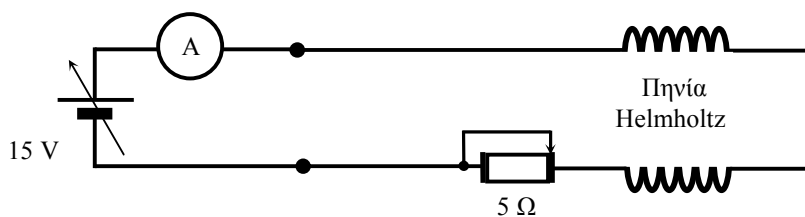
## Βιβλιογραφία

1. *Μαθήματα Φυσικής Berkeley*. Τόμος 1: Μηχανική. (Αθήνα 1978), Κεφ. 3.
2. Alonso-Finn. *Θεμελιώδεις Πανεπιστημιακή Φυσική*. Τόμος II: Πεδία και Κύματα.
3. Κ. Αλεξόπουλος. *Γενική Φυσική*. Τόμος 3: Ατομική και Πυρηνική Φυσική. Κεφ. Α.
4. F. Lobkowich and A. Melissinos. *Physics for scientists and Engineers*. Vol. II, Ch. 10.

## 14.5. Εκτέλεση

**Προσοχή.** Στην Άσκηση χρησιμοποιείται επικίνδυνη για τη ζωή τάση **350 V**. Για τον λόγο αυτό η συναρμολόγηση του κυκλώματος πρέπει να γίνεται αυστηρά **μόνον όταν όλες οι πηγές τάσης είναι κλειστές**. Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι τα τροφοδοτικά τίθενται σε λειτουργία **μόνον** από τον επιβλέποντα της Άσκησης.

1. Αναγνωρίστε τα κύρια μέρη της πειραματικής διάταξης που βλέπετε στο Σχήμα 14.2 και στη συνέχεια συναρμολογήστε το κύκλωμα τροφοδοσίας των πηνίων Helmholtz, σύμφωνα με τα σχέδια που βλέπετε στο Σχήμα 14.2. Μέσω των συνδέσεων που υπάρχουν στο εσωτερικό του κιβωτίου - βάση, δημιουργείται αυτομάτως το ηλεκτρικό κύκλωμα που βλέπουμε στο Σχ. 14.3. Στο κιβώτιο-βάση ο διακόπτης “**e/m: deflect**” πρέπει να βρίσκεται στη θέση **e/m**.



Σχήμα 14.3

2. Σημειώνουμε ότι στο κιβώτιο-βάση, εκ δεξιών:

**A.** Πάνω από το πρώτο ζευγάρι ακροδεκτών που χρησιμοποιείται για τη θέρμανση της καθόδου του τηλεβόλου αναγράφεται η λέξη **HEATER**.

**B.** Πάνω από το δεύτερο ζευγάρι που χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία των δύο βασικών ηλεκτροδίων του τηλεβόλου αναγράφεται η λέξη **ELECTRODES**.

C. Πάνω από το τρίτο ζευγάρι αναγράφεται η λέξη **DEFLECT PLATES**. Το ζευγάρι αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της τάσης που εφαρμόζεται στα πλακίδια εκτροπής, όταν ο διακόπτης “**e/m: deflect**” βρίσκεται στη θέση “**deflect**” και η ακρίβεια του ενσωματωμένου στο τροφοδοτικό αναλογικού βολτόμετρου δεν είναι επαρκής.

D. Πάνω από το τέταρτο ζευγάρι αναγράφεται η λέξη **VOLTMETER (350 V)**. Το ζευγάρι αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της τάσης που εφαρμόζεται στην άνοδο του τηλεβόλου με όργανο μεγαλύτερης ακρίβειας, όταν ο διακόπτης “**e/m: deflect**” βρίσκεται στη θέση “**e/m**” και η ακρίβεια του ενσωματωμένου στο τροφοδοτικό αναλογικού βολτόμετρου δεν είναι επαρκής.

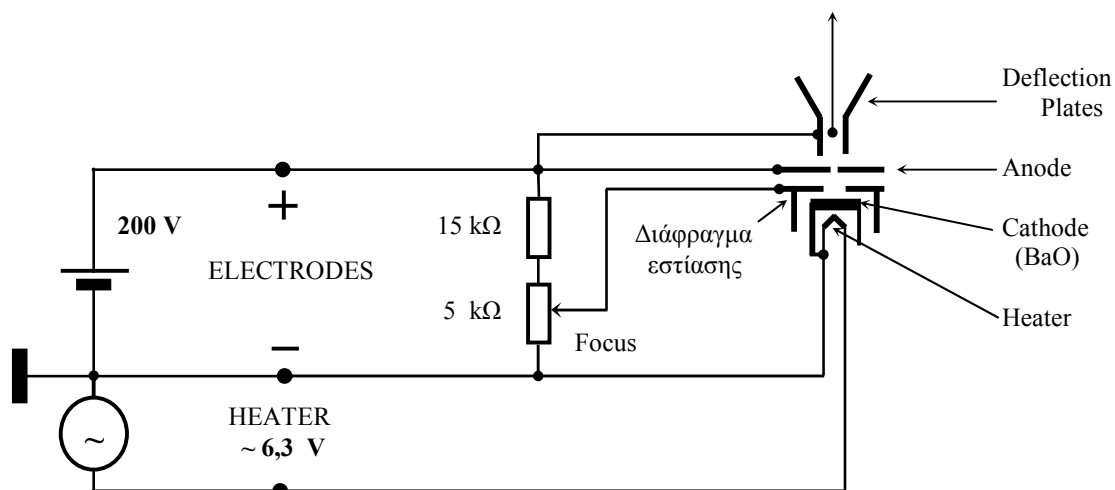
E. Πάνω από το πέμπτο ζευγάρι αναγράφεται η λέξη **HELMHOLTZ COILS**. Το ζευγάρι αυτό χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία των πηνίων Helmholtz.

3. Θέσατε σε λειτουργία το τροφοδοτικό που τροφοδοτεί τα πηνία Helmholtz.

**Σημείωση.** Στο κιβώτιο-βάση, το κουμπί **Current ADJ** χρησιμεύει για τη μεταβολή του ρεύματος στα πηνία Helmholtz. Αλλά λόγω μακροχρόνιας χρήσης, η φθορά των επαφών στο ποτενσιόμετρο αυτό δημιουργεί ακανόνιστες μεταβολές στο ρεύμα των πηνίων. Για να παρακαμφτεί το πρόβλημα αυτό, στρίψτε το κουμπί “τέρμα δεξιά”, ή “τέρμα αριστερά” όπου οι επαφές είναι καλές. Η ρύθμιση αυτή δε δημιουργεί πρόβλημα στην τροφοδοσία των πηνίων, καθώς η ωμική αντίσταση των πηνίων είναι περίπου **5 Ω**. Επομένως όταν το ποτενσιόμετρο ήταν σε καλή κατάσταση, η αντίσταση του κυκλώματος μεταβαλλόταν από **5 έως 10 Ω**. Το τροφοδοτικό των **15 V** της Άσκησης μπορεί να τροφοδοτήσει άνετα τις δύο τιμές αντίστασης.

Όταν το ποτενσιόμετρο είναι απενεργοποιημένο, η μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα μπορεί να γίνει μέσω μεταβολής της τάσης που παράγει το τροφοδοτικό των **15** βολτ.

4. Συναρμολογήστε το κύκλωμα τροφοδοσίας του τηλεβόλου ηλεκτρονίων σύμφωνα με το σχέδιο που βλέπετε στο Σχ. 14. 2. Μέσω των ηλεκτρικών συνδέσεων που υπάρχουν στο εσωτερικό του κιβωτίου - βάση, υλοποιείται αυτομάτως το ηλεκτρικό κύκλωμα που βλέπουμε στο Σχ. 14.4.



Σχήμα 14.4. Τροφοδοσία του τηλεβόλου

5. Καλέστε τον επιβλέποντα της Άσκησης προκειμένου να ελέγξει το όλο κύκλωμα. Αν η συναρμολόγηση είναι επιτυχής, ο επιβλέπων θα θέσει σε λειτουργία τα δύο τροφοδοτικά και θα σας ενημερώσει σχετικά για τον έλεγχο και χρήση του τροφοδοτικού υψηλής ανοδικής τάσης.

Σημειώνουμε ότι η διάρκεια ζωής της κάθοδο μειώνεται αισθητά όταν η ανοδική τάση εφαρμόζεται σε ψυχρή κάθοδο. Επομένως πρώτα θερμαίνουμε την κάθοδο του τηλεβόλου (2-3 λεπτά αρκούν) και μόνο μετά εφαρμόζουμε στην άνοδο την ανοδική τάση! Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το τροφοδοτικό του τηλεβόλου διαθέτει έναν πρόσθετο διακόπτη, με ενεργοποίηση του οποίου επιτυγχάνεται η εφαρμογή της ανοδικής τάσης στην άνοδο του τηλεβόλου.

**Σημείωση.** Στο κιβώτιο-βάση οι εσωτερικές συνδέσεις δημιουργούν τη συνδεσμολογία που βλέπουμε στο Σχ. 14.4. Εδώ η υψηλή τάση εφαρμόζεται στην άνοδο με την οπή, ενώ η εστίαση της δέσμης επιτυγχάνεται μέσω ρύθμισης της τάσης στο διάφραγμα εστίασης (Focus). Από τις τιμές των αντιστάσεων του διαιρέτη συμπεραίνουμε ότι η τάση αυτή μπορεί να μεταβάλλεται από 0 έως  $U_d/4$ .

6. Ρυθμίστε την ανοδική τάση στα +200 V και θέσατε σε λειτουργία τον πρόσθετο διακόπτη. Θα εμφανιστεί μία οριζόντια ευθύγραμμοι δέσμη ηλεκτρονίων που θα τερματίζει στην εσωτερική επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας. Στη συνέχεια, αυξάνοντας το ρεύμα στα πηνία έως περίπου 1,3 A, θα διαπιστώσετε καμπύλωση της δέσμης και εμφάνιση ενός κύκλου με διάμετρο περίπου 6 - 9 cm.

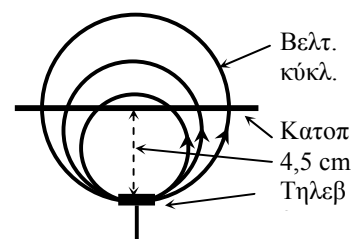
7. Ρυθμίστε το κουμπί Fokus, προκειμένου να λεπτύνετε τη δέσμη. Από το σημείο αυτό είστε έτοιμοι να κάνετε τα πειράματα.

**Σημείωση.** Μη χρησιμοποιείτε τάσεις άνω των 260 V και, επίσης, μην αφήνετε τη λυχνία υπό τάση για μεγάλα χρονικά διαστήματα, καθώς τα θετικά ιόντα του Ηλίου που δημιουργούνται από τα ηλεκτρόνια της δέσμης βομβαρδίζουν την κάθοδο με ενέργειες της τάξης 200 -260 eV και έτσι προκαλούν τη φθορά της (φαινόμενο spattering).

#### 14.5.1. Μέθοδος βέλτιστου κύκλου

Στην πειραματική διάταξη η δέσμη των ηλεκτρονίων σχηματίζει έναν κύκλο, η διάμετρος του οποίου πρέπει να μετρηθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς η κύρια συνιστώσα του σφάλματος προέρχεται από την τιμή αυτή.

Η μέτρηση της διαμέτρου γίνεται με μία κατοπτρική κλίμακα που έχει οριζόντιο προσανατολισμό και βρίσκεται (δυστυχώς) στην οριζόντια διάμετρο της γυάλινης σφαίρας (θα έπρεπε να βρίσκεται στην κάθετη διάμετρο), πίσω της, σε απόσταση 10 cm από το κέντρο της σφαίρας (βλ. σχήμα). Το γεγονός αυτό δημιουργεί μεγάλη παράλλαξη κατά τη μέτρηση της διαμέτρου, η οποία μειώνεται αισθητά αν καταφύγουμε στον **βέλτιστο κύκλο**, η διάμετρος του οποίου είναι 9,0 cm. Τον κύκλο αυτόν τον αποκαλούμε **βέλτιστο** για δύο λόγους.



**A.** Είναι μικρότερος από τη διάμετρο της γυάλινης σφαίρας (13 cm) και επομένως τα ηλεκτρόνια δε συγκρούονται με αυτή και δεν τη φορτίζουν με ηλεκτρικό φορτίο. Επίσης, ο κύκλος αυτός είναι αρκετά μεγάλος και επομένως η διάμετρος του μπορεί να μετρηθεί με μικρό σχετικό σφάλμα.

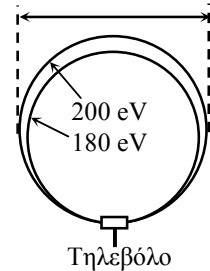
**B.** Λόγω του ότι το τηλεβόλο βρίσκεται στην κατακόρυφο και χαμηλότερα κατά 4,5 cm από το κέντρο της σφαίρας (βλ. παραπ σχήμα), αλλά και λόγω ατυχούς προσανατολισμού της κατοπτρικής κλίμακας για τη μέτρηση της διαμέτρου, στη διάταξη αυτή, αντί να μετρείται η διάμετρος του

κύκλου, ουσιαστικά μετράται η χορδή του. Επειδή μόνο ο κύκλος με ακτίνα **4,5 cm** είναι ομόκεντρος με τη σφαίρα, μόνο σε αυτόν τον κύκλο η κατοπτρική κλίμακα συμπίπτει με τη οριζόντια διάμετρό του. Επομένως, λόγω μεγάλης παράλλαξης, στον βέλτιστο κύκλο τα όποια σφάλματα μέτρησης της διαμέτρου μειώνονται σημαντικά.

### 14.5.2. Πείραμα 1

1. Με σταθερή ανοδική τάση **+200 V**, ρυθμίστε το ρεύμα των πηνίων έως ότου ο κύκλος αποκτήσει διάμετρο **9,0 cm**. Σημειώστε τη διάμετρο, την τιμή του ρεύματος όπως και τα σφάλματά στη διάμετρο και το ρεύμα.

2. Επαναλάβετε το προηγούμενο βήμα άλλες **6** φορές. Επομένως στο πείραμα 1, ο λόγος  $e/m$  θα υπολογιστεί από την τιμή της διαμέτρου (**9 cm**), της μέσης τιμής του ρεύματος και της τάσης **200 V**. Το σφάλμα της τάσης το αντλείτε από το σφάλμα του βολτόμετρου, φροντίζοντας το σφάλμα ανάγνωσης να είναι “0” ( $\varepsilon_{\text{αν}} \leq \psi/10$ ), ενώ το σφάλμα της διαμέτρου το εκτιμάτε ανάλογα με τη δυσκολία μέτρησης της διαμέτρου του βέλτιστου κύκλου.



**Σημείωση.** Λόγω διασποράς στις ενέργειες των ηλεκτρονίων της δέσμης (βλ. Παράρτημα 1), παρά τις ρυθμίσεις με το κουμπί **FOCUS**, η γραμμή του κύκλου δεν είναι λεπτή παντού. Η δέσμη παραμένει πλατιά στο πάνω μέρος του κύκλου, ενώ λεπταίνει μόνο στην περιοχή του τηλεβόλου (βλ. σχήμα). Επομένως όταν μετράμε τη διάμετρο του κύκλου που αντιστοιχεί σε ανοδική τάση **200 V**, τις ενέργειες **200 eV** έχουν τα ηλεκτρόνια που σχηματίζουν την εξωτερική πλευρά της δέσμης. Συνεπώς σωστό είναι να σημειώνουμε τις θέσεις της εξωτερικής γραμμής του κύκλου και όχι του κέντρου της δέσμης, όπως συνηθίζεται.

### 14.5.3. Πείραμα 2

Εδώ ο λόγος  $e/m$  θα υπολογιστεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Στο πείραμα αυτό τα μετρούμενα μεγέθη είναι η ανοδική τάση και το ρεύμα των πηνίων, ενώ η διάμετρος του κύκλου είναι *παράμετρος* του πειράματος και φροντίζουμε να είναι πάντα **9,0 cm**.

Για την εκτέλεση του πειράματος 2:

1. Εφαρμόστε στην άνοδο του πυροβόλου τάση **160 V** “ακριβώς”, δηλαδή με σφάλμα ανάγνωσης “0” (σωστότερα, μικρότερο από  $\psi/10$ ) και ρυθμίστε το ρεύμα των πηνίων έως ότου στη λυχνία σχηματιστεί κύκλος με διάμετρο **9,0 cm**. Σημειώστε την τιμή αυτού του ρεύματος.
2. Επαναλάβετε το παραπάνω βήμα για τις ανοδικές τάσεις **180, 200, 220, 240** και **260 V**.
3. Κλείστε τα όργανα με την εξής σειρά: διακόπτης υψηλής τάσης “**HT**” σε θέση **OFF**, γενικός διακόπτης του τροφοδοτικού σε θέση **OFF**. Επίσης, κλείστε και τους γενικούς διακόπτες του τροφοδοτικού των πηνίων και του ψηφιακού αμπερόμετρου.

## 14.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

### 14.6.1. Επεξεργασία του Πειράματος 1

Στο Πείραμα 1, το λόγο  $e/m$  τον υπολογίζετε από τη σχέση (14.5), όπου  $R = 0,15 \text{ m}$ ,  $N = 130$  και  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ . Στις τιμές  $R$ ,  $N$ , και  $\mu_0$  τα σφάλματα θεωρούνται **0**.

Με την αντικατάσταση των όρων  $R$ ,  $N$  και  $\mu_0$  με τις αντίστοιχες τιμές, η σχέση (14.5) γίνεται

$$\frac{e}{m} = \frac{250R^2}{64\mu_0^2 N^2} \times \frac{U_a}{r^2 I^2} = 3,2933 \times 10^6 \times \frac{U_a}{r^2 I^2} \frac{C}{kg}, \quad (14.6)$$

όπου η ανοδική τάση,  $U_a$ , είναι σε μονάδες V, η ακτίνα του κύκλου,  $r$ , σε m και το ρεύμα των πηνίων,  $I$ , σε μονάδες A.

**A.** Υπολογίστε το λόγο  $e/m$  με βάση τη σχέση (14.6), όπου η ακτίνα  $r$  είναι **4,5 cm**, ενώ το  $I$  είναι η μέση τιμή του ρεύματος στις 7 μετρήσεις των  $I_i$ .

**B.** Υπολογίστε το σφάλμα του λόγου  $e/m$  (σωστότερα, το διάστημα σφάλματος εντός του οποίου βρίσκεται το σφάλμα το ακριβές), λαμβάνοντας υπόψη και τα εγγραμμένα σφάλματα των οργάνων, δηλαδή τα σφάλματα  $\Delta U_a$  και  $\Delta I$  (το  $\Delta r$  το δηλώνετε κατ' εκτίμηση, αλλά σε εγγραμμένη μορφή, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το σφάλμα της ακτίνας είναι 2 φορές μικρότερο από αυτό της διαμέτρου).

- Το σφάλμα στην τάση  $U_a$ ,  $\Delta U_a$ , το υπολογίζετε από την τιμή της ελάχιστης υποδιαίρεσης του αναλογικού βολτόμετρου.
- Το σφάλμα στο  $r$ ,  $\Delta r$ , το εκτιμάτε στο εργαστήριο, κατά τη διάρκεια του πειράματος.
- Στο σφάλμα του ρεύματος,  $\Delta I$ , πρέπει να λάβετε υπόψη τη βασική αρχή της Μετρολογίας:

$$\Delta I_{\text{ολικό}} = \Delta I_{\text{οργάνου}} + \Delta I_{\text{τυχαίο}} \quad (P \geq 99,7 \%),$$

όπου οι δύο όροι προσδιορίζονται χωριστά, θεωρώντας τον άλλο μηδέν.

- Το σφάλμα  $\Delta I_{\text{οργ}}$  το υπολογίζετε από τις μετρολογικές προδιαγραφές του ψηφιακού μετρητή:

$$\text{Accuracy } (I, d.c.): 2,5 \% + 5r,$$

Επομένως:  $\Delta I_{\text{οργ}} = (2,5 \%)$  επί της μέσης τιμής των  $I_i$  συν  $5r$ . Το σφάλμα αυτό είναι εγγραμμένο.

- Το σφάλμα  $\Delta I_{\text{τυχ}}$  το υπολογίζετε κανονικά, δηλαδή ως τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής,  $\sigma_{\mu}$ , πολλαπλασιαζόμενο επί το συντελεστή Student  $t_{n,p}$  ( $\Delta I_{\text{τυχ}} = \sigma_{\mu} t_{n,p}$ ). Για  $n = 7$  και  $P = 99,7 \%$ , ο συντελεστής αυτός είναι **4,90** ( $t_{n,p} = 4,90$ , βλ. Πίνακα συντελεστών Student).
- Στο επόμενο βήμα, από τη σχέση (14.6) υπολογίζετε το σχετικό σφάλμα του λόγου  $e/m$ , το οποίο είναι:

$$\delta_{e/m} = \frac{\Delta(e/m)}{e/m} = \frac{\Delta U_a}{U_a} + 2 \frac{\Delta I_{\text{ολ}}}{I} + 2 \frac{\Delta r}{r}, \quad (14.7)$$

ενώ το σφάλμα  $\Delta(e/m)$  (το “απόλυτο σφάλμα”) το υπολογίζετε από το σχετικό σφάλμα που υπολογίσατε προηγουμένως:

$$\Delta(e/m) = \frac{e}{m} \times \delta_{e/m}. \quad (14.8)$$

- Το τελικό αποτέλεσμα το σημειώνετε σε μορφή

$$e/m = (\text{τιμή}) \pm \Delta(e/m)$$

**Σημείωση.** Στη βιβλιογραφία, για το λόγο  $e/m$  του ηλεκτρονίου αναφέρεται η τιμή

$$e/m = (1,7588 \pm 0,0001) \times 10^{11} \text{ C/kg.}$$



### 14.6.2. Επεξεργασία του Πειράματος 2

Γενικότερα, η μέτρηση του λόγου  $e/m$  με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι προτιμότερη, καθώς αποτελεί παραλλαγή της μεθόδου “κλίσης”, δηλαδή μέθοδος μέτρησης της φυσικής παραμέτρου μέσω μέτρησης της κλίσης της πειραματικής ευθείας.

Στο πείραμα 2, στο σφάλμα της κλίσης συμβάλουν μόνο το σφάλμα ανάγνωσης του αναλογικού μετρητής τάσης (“0” ή  $\varepsilon_{av} \leq \psi/10 = 1 \text{ V}$ ) και το ποσοστιαίο σφάλμα του ψηφιακού μετρητή ρεύματος  $\gamma$  ( $\gamma = 2,5 \%$ ). Τα άλλα δύο μεγάλα σφάλματα, δηλαδή το σφάλμα  $hr$  ( $5r$ ) του ψηφιακού μετρητή και το σφάλμα  $\varepsilon_{κvp}$  του αναλογικού οργάνου ( $\varepsilon_{κvp} = \psi/2 = 5 \text{ V}$ ), η μέθοδος κλίσης τα αποβάλλει (βλ. Συμπληρωματικές σημειώσεις).

Έτσι, από την κλίση  $b$  της πειραματικής ευθείας

$$I = b\sqrt{U_a}, \quad (14.9)$$

όπου  $y = I$  και  $x = \sqrt{U_a}$ , υπολογίστε το λόγο  $e/m$  με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, λαμβάνοντας υπόψη και τα σφάλματα των οργάνων.

Από τη σχέση (14.5), προκύπτει η σχέση για το  $b^2$ :

$$b^2 = \frac{I^2}{U_a} = \frac{m}{e} \times \frac{250R^2}{64r^2\mu_0^2N^2}. \quad (14.10)$$

Επομένως στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ο λόγος  $e/m$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{b^2} \times \frac{250R^2}{64\mu_0^2N^2} \times \frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2} \times 16,263 \times 10^8 \frac{\text{C}}{\text{kg}}, \quad (r = 0,045 \text{ m}) \quad (14.11)$$

ενώ το σφάλμα του λόγου  $e/m$ ,  $\Delta(e/m)$ , θα το υπολογίσετε από τη σχέση για τα σχετικά σφάλματα:

$$\frac{\Delta(e/m)}{e/m} = 2 \frac{\Delta b_{ολ}}{b} + 2 \frac{\Delta r}{r}.$$

Επομένως,

$$\Delta(e/m) = \frac{e}{m} \times \left( 2 \frac{\Delta b_{ολ}}{b} + 2 \frac{\Delta r}{r} \right), \quad (14.12)$$

όπου τον όρο  $2\Delta r/r$  τον έχετε υπολογίσει στο Πείραμα 1, ενώ ο όρος  $\Delta b_{ολ}$  είναι το ολικό σφάλμα στον υπολογισμό της κλίσης  $b$ , στο οποίο συμβάλουν τα σφάλματα των 2 οργάνων, όπως και η αβεβαιότητα της κλίσης  $b$ .

Καθώς όμως στην παρούσα ανάλυση λαμβάνονται υπόψη και τα σφάλματα των οργάνων, το ολικό σφάλμα στην κλίση  $\Delta b_{ολ}$  πρέπει να το υπολογίσετε ως άθροισμα δύο όρων:

$$\Delta b_{ολ} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{τυχ}, \quad (P \geq 99,7 \%), \quad (13)$$

όπου  $\Delta b_{οργ}$  είναι η συνιστώσα του σφάλματος των οργάνων, ενώ το  $\Delta b_{τυχ}$  είναι η αβεβαιότητα της κλίσης  $b$ , που προκαλείται από τη διασπορά των πειραματικών σημείων γύρω από την βέλτιστη ευθεία. Η διασπορά αυτή άμεσα εξαρτάται από τη διασπορά των τιμών  $y_i$ , καθώς στις τιμές των  $x_i$  η διασπορά είναι 0.

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη βασική αρχή της Μετρολογίας, τα σφάλματα των δύο όρων θα τα προσθέσετε αριθμητικά, εφόσον στην αβεβαιότητα του τυχαίου σφάλματος προσδώσετε πιθανότητα κάλυψης **99,7 %**, προκειμένου η πρόσθεση των δύο όρων να είναι δυνατή (μεγέθη με διαφορετική πιθανότητα κάλυψης δεν μπορούν να προστεθούν).

#### 14.6.2.1. Πρώτος όρος της σχέσης (13), $\Delta b_{\text{οργ}}$ . Προσέγγιση $\Delta b_{\text{τυχ}} = 0$ . Συνάρτηση τύπου $y = bx$

Όταν εξετάζουμε τον όρο  $\Delta b_{\text{οργ}}$ , τα πειραματικά σημεία  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \dots (x_n, y_n)$ , που μετρήθηκαν άμεσα, τα φανταζόμαστε να πέφτουν πάνω σε μία ευθεία ακριβώς. Ωστόσο λόγω σφαλμάτων των οργάνων, η κλίση αυτής της ευθείας, που θα την αποκαλούμε πειραματική ( $b_{\text{πειρ}}$ ), αναμένουμε να διαφέρει “ελαφρώς” από αυτή της πραγματικής, κατά  $\Delta b_{\text{οργ}}$ . Η παραδοχή αυτή μας επιτρέπει την κλίση της πειραματικής ευθείας να την υπολογίσουμε από το λόγο

$$b_{\text{πειρ}} = \Delta y / \Delta x = (y_n - y_1) / (x_n - x_1),$$

ενώ στην ανάλυση του σφάλματος που προκαλούν τα δύο όργανα να περιλάβουμε μόνο τα 2 ακραία πειραματικά σημεία: το σημείο  $(x_1, y_1)$  και το σημείο  $(x_n, y_n)$ .

Γενικότερα (βλ. Συμπληρωματικές σημειώσεις), σε άμεσες μετρήσεις των  $y_i$  και  $x_i$ , όπου ο μετρητής των  $y_i$  είναι ψηφιακός, ενώ των  $x_i$  είναι αναλογικός, το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα δύο όργανα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta b_{\text{οργ}} = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{x_n - x_1} \right),$$

η οποία είναι απαλλαγμένη από τους όρους  $hr$  του ψηφιακού μετρητή και  $\varepsilon_{\text{κνρ}}$  του αναλογικού οργάνου.

Καθώς όμως στο πείραμα 2 οι τιμές των  $x_i$  δεν μετρούνται άμεσα αλλά υπολογίζονται από το σφάλμα ανάγνωσης των τάσεων  $U_i$  ( $x_i = \sqrt{U_i}$ ), στη παραπάνω σχέση το μέγεθος  $\delta x_{\text{av}}$  είναι παραγόμενο, δηλαδή δεν εκτιμάται άμεσα από την κλίμακα του οργάνου, αλλά παράγεται (υπολογίζεται) από το σφάλμα ανάγνωσης στις τιμές  $U_i$ , το οποίο σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να το θεωρήσουμε 0. Η προσέγγιση αυτή μηδενίζει τον αριθμητή στο δεύτερο όρο της παραπάνω σχέσης. Αλλά σε πιο εκλεπτυσμένη προσέγγιση, το σφάλμα ανάγνωσης στις τιμές των  $U_i$  μπορούμε να το θεωρήσουμε μικρότερο από  $\psi/10$  (μικρότερο του μισού πάχους της χαρακιάς,  $\varepsilon_{\text{άν}} \leq \psi/10$  ή  $1 \text{ V}$ ). Για τις παραγόμενες τιμές των  $\delta x_{\text{av}}$ , η δεύτερη προσέγγιση δίνει ένα άνω όριο:

$$\delta x_{\text{av}} = \frac{1}{2} \times \frac{\delta U}{\sqrt{U}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{\varepsilon_{\text{av}}}{\sqrt{U_1}} = \frac{1}{2} \times \frac{(\psi_U / 10)}{\sqrt{160}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{160}} \approx 0,04 \text{ (V}^{1/2}\text{)}.$$

Έτσι, σε συνθήκες μηδενικής διασποράς των πειραματικών σημείων, το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα δύο όργανα δεν υπερβαίνει την τιμή

$$\Delta b_{\text{οργ}} = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{x_n - x_1} \right) = b \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{\sqrt{260} - \sqrt{160}} \right),$$

όπου η παρένθεση παριστάνει το άνω όριο του ποσοστιαίου σφάλματος της κλίση  $b$ :

$$\gamma_y + \frac{2\delta x_{\text{av}}}{\sqrt{260} - \sqrt{160}} = 0,025 + \frac{2 \times 0,04}{3,47} = 2,5\% + 2,3\% = 4,8\%.$$

Έτσι, η συνιστώσα του “σφάλματος” που προκαλείται μόνο από τα σφάλματα των 2 οργάνων δεν υπερβαίνει την τιμή

$$\Delta b_{\text{οργ}} = b \times 0,048, \quad (14.14)$$

και, καθώς είναι εγγυημένη, καλύπτεται με πιθανότητα **100 %**.

Στο επόμενο βήμα, στο σφάλμα  $\Delta b_{οργ}$  (συνιστώσα του πρώτου όρου) πρέπει να προσθέσετε και την αβεβαιότητα της μέσης τιμής της κλίσης  $b$ , εφόσον πρώτα στο διάστημα αβεβαιότητας,  $t_{n,p}\sigma_{b\mu}$ , προσδώσετε πιθανότητα κάλυψης **99,7 %**. Αυτό γίνεται μέσω πολλαπλασιασμού του τυπικού σφάλματος της μέσης τιμής,  $\sigma_{b\mu}$ , με τον κατάλληλο συντελεστή Student  $t_{n,p}$  ( $t_{n,p} = 5,51$ , βλ. Πίνακα συντελεστών Student).

#### 14.6.2.2. Δεύτερος όρος της σχέσης (13), $\Delta b_{τυχ}$ . Προσέγγιση $\Delta b_{οργ} = 0$ . Συνάρτηση τύπου $y = bx$

Στα πειράματα όπου η διασπορά των πειραματικών σημείων δεν είναι μηδέν, δηλαδή όπου τηρούνται οι όροι  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$  και, επιπλέον,  $\sigma_y = \text{σταθ}$ , η κλίση της πειραματικής ευθείας είναι προτιμότερο να υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Σε συναρτήσεις τύπου  $y = bx$ , η κλίση της βέλτιστης ευθείας την υπολογίζετε από τη σχέση:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (14.15)$$

(βλ. Παράρτημα 2), ενώ την τυπική απόκλιση της κλίσης (όχι το τυπικό σφάλμα) την υπολογίζετε από τη σχέση

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (14.16)$$

όπου

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)}. \quad (14.17)$$

Τελικά, το σφάλμα της μέσης τιμής της κλίσης  $b$  θα το υπολογίσετε από τη σχέση

$$\sigma_{b\mu} = \frac{\sigma_b}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{n(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}}, \quad (14.18)$$

Για μεγάλα  $n$  ( $n \geq 200$ ), το μέγεθος  $\sigma_{b\mu}$  καλύπτεται με πιθανότητα **68,3 %**. Όμως για μικρά  $n$  ( $3 < n < 10$ ) και πιθανότητα κάλυψης **99,7 %**, το τυπικό σφάλμα  $\sigma_{b\mu}$  πρέπει να πολλαπλασιαστεί στον αντίστοιχο συντελεστή Student, που για  $n = 6$ , ο συντελεστής αυτός είναι **5,51**. Μετά την ενέργεια αυτή, το μέγεθος  $t_{n,p}\sigma_{b\mu}$  μπορεί να προστεθεί στη συνιστώσα του σφάλματος που προκαλείται μόνο από τα σφάλματα των οργάνων. Αυτό δίνει την τελική σχέση από την οποία θα υπολογίσετε το ολικό σφάλμα  $\Delta b_{ολ}$ , στην τιμή της κλίσης  $b$ :

$$\Delta b_{ολ} = \bar{b} \left( \gamma_y + \frac{2\delta x_{av}}{x_n - x_1} \right) + 5,51 \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{n(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}}. \quad (P \geq 99,7 \%) \quad (14.19)$$

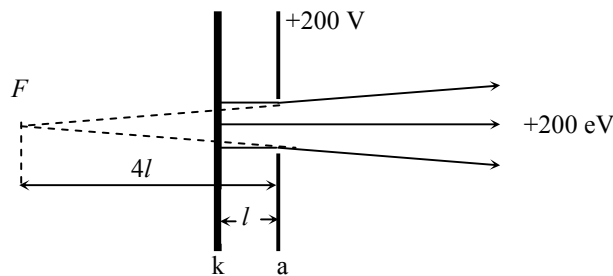
Τελικά, την κλίση της πειραματικής ευθείας θα την υπολογίσετε από τη σχέση (14.15), την τιμή του λόγου  $e/m$  από τη σχέση (14.11), ενώ το σφάλμα στο λόγο  $e/m$  θα το υπολογίσετε από τη σχέση (14.12), όπου η τιμή της  $\Delta b_{ολ}$  υπολογίζεται από τη σχέση (14.19). Το τελικό αποτέλεσμα το παρουσιάζετε σε μορφή

$$e/m = (\text{τιμή}) \pm \Delta(e/m).$$

## 14.7. Παράρτημα 1

### 14.7.1. Ηλεκτροοπτικές ιδιότητες της οπής

Η δέσμη ηλεκτρονίων σχηματίζεται από τα ηλεκτρόνια που διαπερνούν την οπή της ανόδου και κινούνται ευθύγραμμα, λόγω αδράνειας, με ενέργειες “περίπου” **200 eV**, αρκεί στον χώρο δεξιότερα της ανόδου να μην υπάρχουν ηλεκτρικά πεδία. Ο προορισμός του διαφράγματος εστίασης γίνεται κατανοητός αν εξετάσουμε τις αδυναμίες του απλού τηλεβόλου που αποτελείται μόνο από δύο ηλεκτροδία, δηλαδή την κάθοδο και την άνοδο με οπή. Στο σύστημα των δύο ηλεκτροδίων, που θα το αποκαλούμε δίοδο, η δέσμη των ηλεκτρονίων είναι πάντα αποκλίνουσα, δηλαδή η οπή της ανόδου έχει ιδιότητες ενός αποκλίνοντος οπτικού φακού (Σχ 14.5).



Σχήμα 14.5.

Τα θέματα αυτά αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Ηλεκτρονικής Οπτικής, όπου για την εστιακή απόσταση του αποκλίνοντος ηλεκτρονικού φακού οι σχετική υπολογισμοί δίνουν

$$F = 4l,$$

όπου  $l$  είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων.

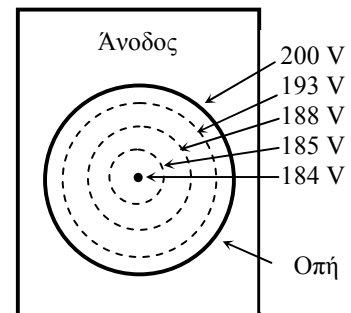
Η ιδιότητα αυτή πηγάζει από την παρουσία εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της οπής. Η σχετική ανάλυση δείχνει ότι στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι μικρότερο κατά ένα παράγοντα που εξαρτάται από τον λόγο  $d/l$ , όπου  $d$  είναι η διάμετρος της οπής:

$$\Phi_c = \Phi_a \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{l} \right).$$

(Στο τηλεβόλο της Άσκησης,  $d = 0,5 \text{ mm}$  και  $l = 1 \text{ mm}$ )

Επίσης, στο επίπεδο της ανοδικής οπής, το εγκάρσιο αυτό πεδίο έχει κυκλική συμμετρία και με καλή προσέγγιση είναι παραβολικό:

$$\Phi(r) = \Phi_c + br^2,$$



όπου ο συντελεστής  $b$  ορίζεται από τη  $\Phi_c$  και τη συνοριακή συνθήκη  $\Phi(d/2) = \Phi_a$ .  
 Στο παραβολικό πεδίο η ένταση του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E(r) = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = -2br,$$

δηλαδή είναι γραμμική συνάρτηση της ακτίνας  $r$ .

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι στο επίπεδο της οπής, στα ηλεκτρόνια ασκείται μία εγκάρσια δύναμη που είναι ανάλογη του  $r$ , δηλαδή το πεδίο αυτό δρα με τον ίδιο τρόπο που ο οπτικός φακός επιδρά στο φως. Βλέπουμε ακόμη ότι η εγκάρσια δύναμη που δρα στο ηλεκτρόνιο είναι μηδέν στο κέντρο και μεγιστοποιείται στην περιφέρεια της οπής.

Η οπή θα αποκτήσει ιδιότητες συγκλίνοντος φακού αν αναστραφεί το εγκάρσιο πεδίο της οπής. Αυτό επιτυγχάνεται όταν στο κέντρο της οπής το δυναμικό γίνει υψηλότερο από αυτό της περιφέρειας. Πιο κάτω θα δούμε έναν δυνατό τρόπο υλοποίησης τέτοιας κατάστασης.

#### 14.7.2. Διασπορά ενεργειών των ηλεκτρονίων της δέσμης

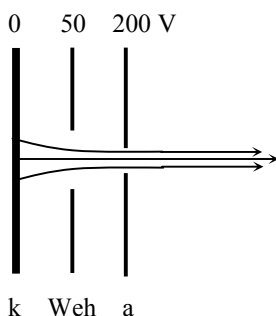
Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα ηλεκτρόνια που διαπερνάνε την οπή της ανόδου δεν έχουν ίδιες κινητικές ενέργειες. Για παράδειγμα, αυτά που διαπερνούν το κέντρο της οπής έχουν ενέργειες όσο είναι το δυναμικό στο κέντρο, δηλαδή  $200(1 - d/2\pi l)$ , ενώ αυτά που κινούνται κοντά στην περιφέρεια της οπής “ξυστά”, έχουν ενέργειες σχεδόν  $200 \text{ eV}$ . Έτσι, όταν ο λόγος  $d/l = 1/2$ , όπως στη λυχνία της Άσκησης, η διαφορά στα δυναμικά και επομένως στις ενέργειες είναι της τάξης  $1/4\pi$  ή περίπου  $\sim 8 \%$ , δηλαδή στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι  $184$  και όχι  $200 \text{ V}$ !

Τονίζουμε ότι η διασπορά στις ενέργειες της δέσμης επηρεάζει άμεσα την ακρίβεια του πειράματος στην Άσκηση αυτή, καθώς στο μαγνητικό πεδίο, άλλης διαμέτρου κύκλο θα διαγράψουν τα ηλεκτρόνια με ενέργειες  $184 \text{ eV}$ , ενώ κύκλο άλλης διαμέτρου (μεγαλύτερης) θα διαγράψουν τα ηλεκτρόνια με ενέργειες  $200 \text{ eV}$  (βλ. Σχήμα στη σελίδα 7).

#### 14.7.3. Αναστροφή του εγκάρσιου ηλεκτρικού πεδίου. Διάφραγμα εστίασης

Η αποστολή του διαφράγματος αυτού είναι να εξουδετερώσει τις αποκλίνουσες ιδιότητες της οπής και με τον τρόπο αυτό να κάνει τη δέσμη ηλεκτρονίων παράλληλη.

Αυτό επιτυγχάνεται με ένα τρίτο ηλεκτρόδιο, το διάφραγμα εστίασης, που τοποθετείται ανάμεσα στην κάθοδο και άνοδο με την οπή. Η οπή του διαφράγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από αυτή της ανόδου, για παράδειγμα  $5$  φορές.



Η δράση του ενδιάμεσου διαφράγματος εξαρτάται από το δυναμικό που αυτό φέρει. Πράγματι, έστω ότι το διάφραγμα βρίσκεται στο μέσο της απόστασης άνοδος-κάθοδος. Αν εφαρμόσουμε στο διάφραγμα το δυναμικό που θα είχε η ισοδυναμική επιφάνεια στο σύστημα των δύο ηλεκτροδίων, δηλαδή  $100 \text{ V}$ , τότε η παρουσία του διαφράγματος δεν θα επιφέρει καμία επίδραση στα κινούμενα ηλεκτρόνια.

Η κατάσταση διαφοροποιείται όταν στο διάφραγμα εφαρμόσουμε τάση μικρότερη από την ισοδυναμική των δύο ηλεκτροδίων, για παράδειγμα,  $50 \text{ V}$ . Καθώς η οπή του διαφράγματος είναι μεγάλη, στο κέντρο της το δυναμικό λίγο θα μειωθεί, αλλά θα παραμείνει στα επίπεδα του  $100 \text{ V}$ , ενώ το δυναμικό της επιφάνειας του διαφράγματος θα είναι  $50 \text{ V}$ . Βλέπουμε ότι εδώ έχουμε μία κατάσταση όπου στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι υψηλότερο από ότι στην περιφέρειά του. Με άλλα λόγια, το εγκάρσιο πεδίο του διαφράγματος τώρα έχει αντίθετη φορά από αυτό της ανόδου. Επομένως το πεδίο του διαφράγματος πιέζει τα ηλεκτρόνια προς τον άξονα

συμμετρίας των δύο οπών. Με την έννοια αυτή το διάφραγμα έχει ιδιότητες ενός συγκλίνοντος φακού, η εστιακή απόσταση του οποίου εξαρτάται από το δυναμικό που αυτό φέρει. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι:

- Όταν το δυναμικό του διαφράγματος είναι υψηλότερο από την ισοδυναμική των δύο ηλεκτροδίων, π.χ. είναι **150 V**, στο κέντρο της οπής το δυναμικό είναι χαμηλότερο (είναι περίπου **100 V**) της περιφέρειας και το διάφραγμα έχει ιδιότητες αποκλίνοντος φακού. Συνεπώς το όλο σύστημα αποτελείται από δύο αποκλίνοντες φακούς,
- Όταν το δυναμικό του διαφράγματος είναι χαμηλότερο από την ισοδυναμική των δύο ηλεκτροδίων, π.χ. είναι **50 V**, στο κέντρο του διαφράγματος το δυναμικό αναμένεται να είναι περίπου όσο το δυναμικό της ισοδυναμικής, δηλαδή περίπου **100 V**, και επομένως υψηλότερο από το δυναμικό της περιφέρειας. Εδώ το διάφραγμα αποκτά ιδιότητες συγκλίνοντος φακού και το όλο σύστημα αποτελείται από έναν συγκλίνοντα και έναν αποκλίνοντα φακό. Ρυθμίζοντας το δυναμικό του διαφράγματος εστίασης, μπορούμε να εξουδετερώσουμε την εγκάρσια δράση της οπής της ανόδου και με τον τρόπο αυτό να κάνουμε τη δέσμη παράλληλη.

Σημειώνουμε ότι οι ηλεκτροοπτικές ιδιότητες των διαφραγμάτων και οπών βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στους καθοδικούς σωλήνες των παλμογράφων, των τηλεοράσεων, των υπολογιστών, στην ηλεκτρονική μικροσκοπία, στις πηγές ακτίνων **X** κ.λ.π.

## 14.8. Παράρτημα 2

### 14.8.1. Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σε συναρτήσεις τύπου $y = bx$ , $\Delta_{\text{οργ}} = 0$ .

Σε μερικές περιπτώσεις η σχετική θεωρητική ανάλυση της πειραματικής μεθόδου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ελεύθερος όρος **a** είναι μηδέν στη σχέση  $y = a + bx$ . Επομένως η πραγματική σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι τύπου

$$y = bx. \quad (14.20)$$

Στις περιπτώσεις αυτές το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής. Από τα **n** πειραματικά ζεύγη  $x_i, y_i$ , να υπολογιστεί η κλίση **b** της βέλτιστης πειραματικής ευθείας  $y = bx$ , η οποία με τον καλύτερο τρόπο προσομοιώνει τα πειραματικά σημεία.

Η εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί στον όρο

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 = \text{ελάχιστο}, \quad (14.21)$$

όπου η αναγκαία συνθήκη για ελάχιστο **S** είναι

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

ή

$$2 \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)x_i = 0. \quad (14.22)$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = b \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

και επομένως

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (14.23)$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς  $(\sigma_b)^2$ , θα λάβουμε υπόψη τις συνθήκες:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \dots = \sigma_{y_n} = \sigma_y, \quad (14.24)$$

όπως επίσης και τις σχέσεις

$$b = b(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \quad \frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \sigma_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial b}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2. \quad (14.25)$$

Αντικαθιστώντας, για την  $(\sigma_b)^2$  προκύπτει:

$$\sigma_b^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) \sigma_y^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (14.26)$$

όπου το  $(\sigma_y)^2$  υπολογίζεται κανονικά από τη σχέση για τα  $(d_i)^2$ , δηλαδή:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{(n-1)} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)}. \quad (14.27)$$

Η διαίρεση εδώ γίνεται δια  $(n-1)$  και όχι  $(n-2)$ , καθώς στο πρόβλημα αυτό ο ελάχιστος αριθμός των πειραματικών ζευγών  $x_b, y_i$  δεν είναι **3**, αλλά **2**. Έχουμε τελικά:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - bx_i)^2}{(n-1)}. \quad (14.28\alpha, \beta, \gamma)$$

Όσο για το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής της κλίσης  $b$ ,  $\sigma_{b\mu}$ , αυτό υπολογίζεται από την τυπική απόκλιση  $\sigma_b$ , διαιρώντας τη δια ρίζα του  $n$ :

$$\sigma_{b\mu} = \frac{\sigma_b}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \times \frac{\sigma_y^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2}{n(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (14.29)$$

**Σημείωση.** Αυτό το κείμενο της Άσκησης 14 είναι αναρτημένο στην προσωπική ιστοσελίδα του Επ. Καθηγητή του Ε.Μ.Π, Πεόγλου Βασιλείου, στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

<http://dielectricsgroup.physics.ntua.gr/peoglos>

Καθώς στο κείμενο της Άσκησης 14 που είναι αναρτημένη στην ιστοσελίδα του Τομέα Φυσικής η επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι απλοϊκή, αλλά και με **2** εσφαλμένες προτροπές στην εκτέλεση και μία στην επεξεργασία του πειράματος **2**, η προετοιμασία αλλά κυρίως η επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων πρέπει να γίνεται από το παρόν.